L2 Économie Année 2019-2020

Module 2 - Outils Quantitatifs Mathématiques pour l'Économiste 3

Fascicule d'exercices

Julie Scholler

Université de Tours — Faculté de droit, économie & sciences sociales

Table des matières

Systèmes linéaires

1. Résolution de systèmes linéaires simples

Exercice 1.

Paul. – As-tu consulté les stats du mois dernier ?

Manon. – Oui, je t'ai à nouveau battu !

Paul. – De combien ?

Manon. – J'ai passée 5 heures de plus que toi sur Instagram.

Paul. – Et ça fait combien chacun ?

Manon. – Pour moi : une fois et demie de plus que toi.

Paul. – Oui, mais ça fait combien ?

Sauriez-vous répondre à Paul ? Avec ces informations, on trouve que Manon a passé 15 sur Instagram et Paul 10.

Exercice 2.

En appliquant la méthode du pivot de Gauss, résoudre les systèmes linéaires suivants.

1. $\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 10 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$

3. $\{2x - y = 10$

4. $\begin{cases} 6x + 15y = 30 \\ 4x + 6y = 16 \end{cases}$

5. $\{x + y = 0$

6. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x + 7y = 0 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x + 7y = 0 \\ -x + y = -8 \end{cases}$

Exercice 3.

Résoudre les systèmes linéaires échelonnés suivants :

1. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ y + 2z = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ z = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 0 = a \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ y + 2z = 5 \\ z = 1 \end{cases}$

Exercice 4.
Résoudre les systèmes linéaires suivants.
On appliquera la méthode de Gauss sur la matrice des coefficients et on donnera le rang de cette matrice.

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 5 \\ 2x & - & 4y & + & z & = & 5 \\ 3x & - & 5y & + & 2z & = & 8 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 5 \\ 2x & + & y & + & z & = & 10 \\ x & + & & & 2z & = & 0 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 3z & = & 2 \\ -x & + & 4y & + & z & = & -1 \\ 3x & - & 2y & - & 3z & = & 4 \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$

5. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 2z & = & 8 \\ -x & + & 3y & - & 4z & = & -16 \end{array}\right.$

6. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 4z & = & -1 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & -2 \end{array}\right.$

7. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & - & y & + & z & = & 1 \\ -5x & + & 2y & - & z & = & -1 \\ x & & & - & 2z & = & 4 \\ 4x & - & y & + & 2z & = & -4 \end{array}\right.$

8. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & y & - & 2z & = & 3 \\ -2x & - & 3y & + & z & = & 2 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$

Exercice 5.
Résoudre les systèmes linéaires suivants.
On appliquera la méthode de Gauss sur la matrice des coefficients et on donnera le rang de cette matrice.

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & - & z & - & t & = & 3 \\ 2x & & & - & z & + & 3t & = & 9 \\ 3x & + & 3y & + & 2z & & & = & 4 \\ -x & - & 2y & + & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & - & t & = & 1 \\ x & + & y & - & z & - & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ x & - & y & - & z & + & t & = & 2 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ 6x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 7 \\ 9x_1 & + & 12x_2 & + & 3x_3 & + & 10x_4 & = & 13 \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -8 \end{array}\right.$

Exercice 6.
Résoudre le système suivant présenté sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Résolution de systèmes linéaires avec paramètres

Exercice 7.
Sous quelle(s) condition(s) sur le nombre réel m les systèmes suivants admettent-ils une unique solution ? Quelle est cette solution ? Dans le cas contraire existe-t-il des solutions ?

1. $S_m^0 : \begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + mz = 0 \\ x + mz = 0 \end{cases}$

2. $S_m : \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + mz = 0 \\ x + mz = 0 \end{cases}$

Exercice 8.
Soit a un nombre réel. On étudie le système linéaire suivant :

$$S_a : \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 2x - y + az = 1 \end{cases}$$

1. En fonction des valeurs du paramètre a, déterminer si le système S_a peut :
   (a) n'admettre aucune solution ;
   (b) admettre exactement une solution ;
   (c) admettre une infinité de solutions.
   On pourra commencer par l'étude du système homogène associé.
2. Résoudre le système S_a lorsque celui-ci admet une (des) solution(s).

Exercice 9.
Soient a, b, et c trois nombres réels.

1. Quelle relation doivent satisfaire les paramètres a, b et c pour que le système suivant ait au moins une solution ?
$$S_{abc} : \begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$
2. Est-ce que le système S_{abc} peut avoir une unique solution ?

Exercice 10.
Résoudre les systèmes, suivant les valeurs de m :

1. $S_1 : \begin{cases} x + (m+1)y = m+2 \\ mx + (m+4)y = 3 \end{cases}$

2. $S_2 : \begin{cases} mx + (m-1)y = m+2 \\ (m+1)x - my = 5m+3 \end{cases}$

3. Application de la résolution de systèmes linéaires

Exercice 11.
Lors d'un spectacle on a vendu des places à 16 euros (tarif plein) et des places à 10 euros (tarif réduit). Il y a eu 852 spectateurs pour une recette de 11160 euros. Déterminer le nombre de places à tarif plein et le nombre de places à tarif réduit.

EXERCICE 12.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

1. Calculer les nombres réels a, b, c et d sachant que : $f(-1) = 0$, $f(0) = 5$, $f(1) = 4$ et $f'(1) = 0$.
2. Soit le polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 5$. Calculer $P(-1)$ en déduire une factorisation de $P(X)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(X) = 0$.

EXERCICE 13.
Un cycliste s'entraîne chaque dimanche en faisant l'aller-retour d'Issy à Labat. Le trajet Issy-Labat n'est pas entièrement plat : il y a des montées, des descentes et du plat. En montée, notre cycliste fait du quinze kilomètres à l'heure, en plat du vingt, en descente du trente. L'aller lui prend deux heures et le retour trois. Sur la portion du trajet qui n'est pas plate, la pente moyenne est de cinq pour cent.

1. Quelle est la distance d'Issy à Labat, quelle est la plus haute de ces deux villes, et quelle est leur différence d'altitude ?
2. Un autre cycliste, plus sportif, fait du vingt kilomètres à l'heure en montée, trente en plat et quarante en descente. Sachant que l'aller-retour Issy-Labat lui prend seulement trois heures quarante, déterminer les trois longueurs : de la partie du trajet qui monte, de celle qui descend, de celle qui est à plat.

Matrices

1. Opérations sur les matrices

Exercice 14.

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Parmi les produits suivants, indiquer lesquels sont possibles et les calculer :
AB, BA, AC, CA, AD, DA, BC, CB, BD, DB, CD, DC.

Exercice 15.

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer et comparer $A^2 - B^2$ et $(A - B)(A + B)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $M, N \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur M et N pour que l'on ait $M^2 - N^2 = (M - N)(M + N)$.

Exercice 16.

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q_{13}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $L_2(5) \cdot A$, $Q_{13}(3) \cdot A$ et $R_{23} \cdot A$. Que remarque-t-on ?
2. Calculer $A \cdot L_2(5)$, $A \cdot Q_{13}(3)$ et $A \cdot R_{23}$. Que remarque-t-on ?

2. Inverses

Exercice 17.

Calculer l'inverse des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 15 & 7 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 18.
Montrer que si A et B sont deux matrices de taille n et sont inversibles alors AB est inversible et :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Exercice 19.
Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB. Peut-on dire que A est inversible ?

Exercice 20.
Soient les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $AB = AC$. La matrice A est-elle inversible ?

Exercice 21.
On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice M^2 et l'exprimer comme combinaison linéaire des matrices M et I_3.
2. En déduire que la matrice M est inversible et déterminer M^{-1}.

Exercice 22.
On considère la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 1 & m+1 & 3+m \\ 2 & 1 & m-5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de la matrice A selon les valeurs de m.
2. Étudier l'inversibilité de la matrice A selon les valeurs de m.

3. Application à la résolution de systèmes linéaires

Exercice 23.
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^{-1}.

2. Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \end{cases}$$

Exercice 24.
Soient le sytème linéaire

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ 2x + y + z = 7 \\ 4x - 3y + 2z = 4 \end{cases}$$

1. Écrire ce système sous forme matricielle $AX = C$.
2. Calculer A^{-1}.
3. En déduire les solutions du système.

4. Puissances de matrices

Exercice 25.
On considère deux matrices A et B telles qu'il existe une matrice P vérifiant $AP = PB$. Montrer que pour tout entier n on a $A^n P = PB^n$.

Exercice 26.
Déterminer les puissances successives des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 9 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 27.
On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 19 & -8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer P^{-1}.
2. Montrer que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et en déduire A^n.

Exercice 28.
On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer, pour tout entier naturel n, N^n.
2. Donner, pour tout entier naturel n, le développement de $(I + N)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
3. Déterminer, pour tout entier naturel n, les coefficients de la matrice A^n.

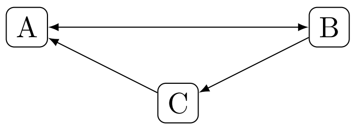
5. Applications

Exercice 29.
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n \end{cases}$ avec $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$.

Calculer u_n et v_n pour tout n, en utilisant la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(On pourra noter que $A = 2I + K$ pour une certaine matrice K, dont on pourra aisément exprimer les puissance n^e et, ensuite, appliquer la formule du binôme de Newton en la justifiant.)

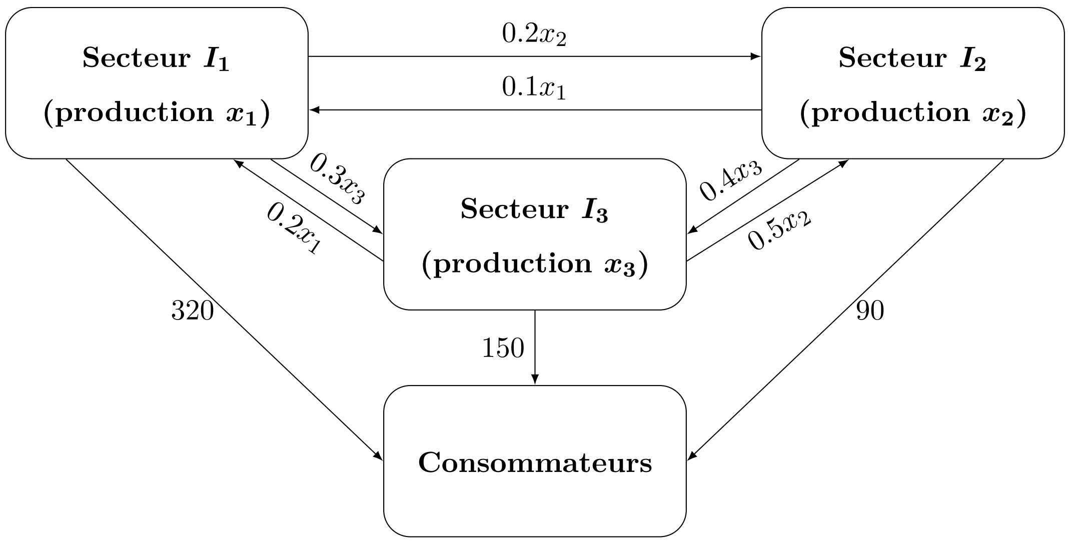
Exercice 30.
Soit le diagramme suivant :



Trouver une matrice M représentant ce diagramme et utiliser le calcul matriciel afin de répondre aux questions suivantes.

1. Combien y a-t-il de chemin reliant A et B de longueur exactement 2 ? de longueur au plus 3 ?
2. Combien y a-t-il de chemin de longueur 4 en tout ?
3. Combien y a-t-il de chemin reliant A à lui même de longueur exactement 4 ? exactement 5 ?

Exercice 31.
Considérons une économie, avec trois secteurs industriels, I_1, I_2 et I_3 et des consommateurs, résumée dans le schéma suivant.



1. Écrire le vecteur X de production, les vecteurs V_i de demande par unité de l'entreprise i $(i = 1, 2, 3)$ et le vecteur de demande des consommateurs B.
2. Que représente x_iV_i ? Que représente $x_1V_1 + x_2v_2 + x_3V_3 + B$?
3. Que signifie l'équation $x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3 + B = X$?
   Écrire cette équation sous forme matricielle. Quelle matrice intervient ?
4. Quelles quantités x_1, x_2 et x_3 doivent-elles produire pour satisfaire à la fois la demande des consommateurs et celle des autres secteurs ?

Déterminants et Bases

1. Déterminants

Exercice 32.
Calculer les déterminants des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -8 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 33.
Pour chacune des matrices $A \in \mathcal{M}_n$ suivantes, déterminer les nombres $x \in \mathbb{R}$ tels que la matrice $A - xI_n$ ne soit pas inversible (ces valeurs de x sont appellées les valeurs propres de la matrice A !).

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Familles de vecteurs

Exercice 34.
Pour les familles de vecteurs ci-dessous, calculer le déterminant de la matrice carrée constituée des vecteurs colonne et en déduire s'il s'agit de bases de $\mathbb{R}^n$ ou non.

1. $\mathcal{F}_1 = \big((1,0),(2,1)\big)$;
2. $\mathcal{F}_2 = \big((1,-2),(-2,4)\big)$;
3. $\mathcal{F}_3 = \big((1,0,1),(2,0,0),(-1,0,1)\big)$;
4. $\mathcal{F}_4 = \big((1,0,0),(2,1,0),(0,3,-1)\big)$;
5. $\mathcal{F}_5 = \big((1,0,1),(2,0,2),(-1,0,-1)\big)$;
6. $\mathcal{F}_6 = \big((1,1,1,0),(0,-1,0,1),(1,0,1,1),(2,0,2,1)\big)$.

Exercice 35.
Échelonner les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ suivantes et en donner le rang. Lesquelles sont des familles libres ? des familles génératrices ? des bases ?

1. $\mathcal{F}_1 = \big((1,-1),(1,3),(3,2)\big)$;
2. $\mathcal{F}_2 = \big((1,2,4),(-3,1,-3),(2,-3,-1)\big)$;
3. $\mathcal{F}_3 = \big((1,2,3),(-1,2,3)\big)$;
4. $\mathcal{F}_4 = \big((2,1,3),(3,2,1),(1,3,2)\big)$.

3. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Exercice 36.
Déterminer, pour chacun des ensembles E ci-dessous, si c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
Représenter graphiquement chacun de ces ensembles.

1. $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x=1\right\}$;
2. $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x=0\right\}$;
3. $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ xy=0\right\}$;
4. $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2=-y^2\right\}$;
5. $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^3=y^3\right\}$;
6. $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x|=|y|\right\}$.

Exercice 37.
Déterminer si les ensembles ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1. $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+y+z=0\right\}$;
2. $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+y+z=1\right\}$;
3. $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y+z=0\right\}$;
4. $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+y+z=1 \text{ et } x+y-z=-1\right\}$;
5. $\{(a,-2a,3a),\ a\in\mathbb{R}\}$;
6. $\{(a,-2a,3a+1),\ a\in\mathbb{R}\}$;
7. $\left\{(-a+b,2a+3b,ab),\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$;
8. $\left\{(-a+b,2a+3b,a),\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

Exercice 38.

1. Montrer que $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x-2y+z=0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   Donner une base de E et la dimension de E.
2. Montrer que $E=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x-2y+z=0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
   Donner une base de E et la dimension de E.

Exercice 39.
Déterminer si les parties suivantes sont des sous-espaces vectoriels de l'espace $\mathbb{R}^n$ adéquat.
Si c'est le cas, déterminer une base de ces sous-espaces vectoriels et leur dimension.

1. $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y=x+1\right\}$;
2. $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y=3x\right\}$;
3. $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ y=3x\right\}$;
4. $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ y=3x+5y\right\}$;
5. $\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ 2x-3y+5z-t=0\right\}$;
6. $\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x+y=z+t=0 \text{ et } y=-z+t\right\}$;
7. $\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x+2y-z+3t=0 \text{ et } 2x-3y+z+2t=0\right\}$;
8. $\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x+2y-z+3t=0 \text{ et } 2x-3y+z+2t=0, z+t=0\right\}$;
9. $\left\{(2a+b+3c,a-2b+14c+5d,3a+b+7c+d),(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\right\}$.

Exercice 40.
On considère les vecteurs

$$v_1=(0,1,-1,0),\qquad v_2=(1,0,1,2),\qquad v_3=(1,1,0,2)\qquad \text{et}\qquad v_4=(0,1,-1,-1).$$

Déterminer une base de $\mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3,v_4)$ en déterminant le rang de la matrice de la famille dans la base canonique.

Exercice 41.
On considère les matrices suivantes : $A=\begin{pmatrix}1&-2\\-5&10\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3&0&-9\\1&1&1\\0&1&4\end{pmatrix}$.

Pour chacune de ces matrices, déterminer leur noyau, une base du noyau et la dimension du noyau.

Diagonalisation et applications

Lorsque rien n'est précisé, on travaille dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Ainsi par défaut, on ne considère que les valeurs propres réelles des matrices.

1. Diagonalisation

Exercice 42 (Matrices triangulaires).
On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés de ces matrices.
2. Expliquer pourquoi ces matrices sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$.
3. Donner une matrice de passage P de la base canonique à la nouvelle base.

Exercice 43 (Matrices non diagonalisables).
Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes.
Justifier pourquoi elles ne sont pas diagonalisables sans déterminer les vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 44.
Pour chacune des matrices ci-dessous, répondre aux questions suivantes.

1. Quelles sont les valeurs propres réelles de cette matrice ?
2. Cette matrice est-elle inversible ?
3. Cette matrice est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? trigonalisable dans $\mathbb{R}$?
4. Cette matrice est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$?

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 45 (Matrices diagonalisables à 2 valeurs propres distinctes).
On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 12 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer, pour chaque matrice, ses valeurs propres.
2. Déterminer, pour chaque matrice, ses sous-espaces propres.
3. Justifier qu'elles sont diagonalisables.

2. Matrices à paramètre

Exercice 46.
Soit a un réel.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de A et en déduire si la matrice A est inversible.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 47.
Déterminer les valeurs du réel a pour lesquelles la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

3. Application au calcul de puissances de matrice

Exercice 48.
Diagonaliser puis déterminer les puissances successives et l'inverse des matrices suivantes.
On précisera pourquoi ces matrices sont diagonalisables et inversibles.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 49.

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 10 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Donner les valeurs propres de A.
   (b) Trouver une base de chaque sous-espace propre.
   (c) Pour tout entier positif n, donner une expression de A^n en fonction de la matrice de changement de base (dans la base formée à partir des bases des sous-espaces propres) et d'une matrice diagonale.
2. Doudou le hamster ne connaît que trois endroits dans sa cage : les copeaux où il dort, la mangeoire où il mange et la roue où il fait de l'exercice. Ses journées sont assez semblables les unes aux autres :
   - Quand il dort, il a 8 chances sur 10 de ne pas se réveiller la minute suivante.
   - Quand il se réveille, il y a 1 chance sur 2 qu'il aille manger et 1 chance sur 2 qu'il parte faire de l'exercice.
   - Le repas ne dure qu'une minute, après il retourne dormir.
   - Courir une minute est fatigant. Après son exercice, Doudou retourne dormir.

   On note d_n, m_n et c_n les probabilités respectives de dormir, manger et courir à la minute n et on suppose qu'à la minute 0 Doudou dort.
   (a) On pose $X_n = \begin{pmatrix} d_n \\ m_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice B telle que pour tout entier n, $X_{n+1} = BX_n$.
   (b) En utilisant la question 1, exprimer X_n en fonction de n et X_0.
   (c) Déterminer d_n pour tout entier positif n et calculer sa limite lorsque n tend vers l'infini. Interpréter.

Exercice 50.

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Donner les valeurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?
   (b) Pour tout entier positif n, calculer A^n.
2. On suit mois par mois l'évolution de la population d'une île atteinte par un virus de type zombioïde. On constate que d'un mois sur l'autre un tiers de la population de zombies meure et que deux tiers de la population saine se transforme en zombie. On note x_n le nombre d'individus morts au bout de n mois, y_n et z_n respectivement le nombre de zombies, et celui d'individus sains à la fin du n^e mois.
   On suppose que $x_0 = 0$, de sorte que $y_0 + z_0$ est la population totale de l'île au début de l'infection. On supposera en plus qu'il n'y a aucun ajout d'individus extérieurs, ni de naissance.
   (a) On note $I_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, montrer qu'il existe une matrice B telle que pour tout entier n, $I_{n+1} = BI_n$.
   (b) Exprimer I_n en fonction de n et I_0.
   (c) Que peut-on conclure concernant l'évolution de cette population ? (Il s'agit d'étudier les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.)