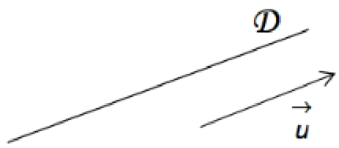
DROITES DU PLAN

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/d-rUnClmcCY

I. Vecteur directeur d'une droite

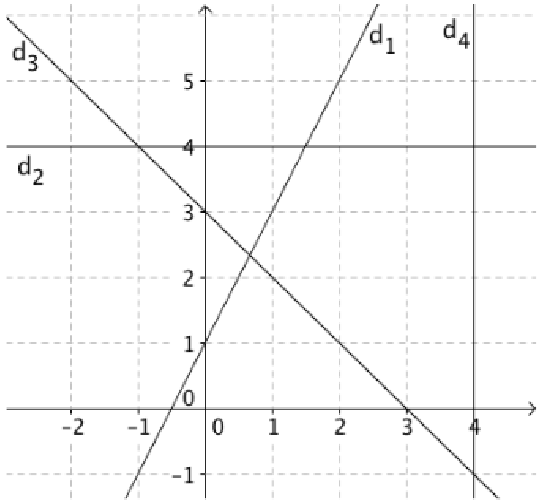
Définition :
D est une droite du plan.
On appelle vecteur directeur de D tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite D.



Méthode : Déterminer graphiquement un vecteur directeur d'une droite

Vidéo https://youtu.be/6VdSz-0QT4Y

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Donner des vecteurs directeurs des droites d_1, d_2, d_3 et d_4.



Pour d_1 :

Pour d_2 :

Pour d_3 :

Pour d_4 :

II. Équation cartésienne d'une droite

Théorème et définition :
Toute droite D admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.
Un vecteur directeur de D est $\vec{u}(-b\,;a)$.
Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite D.

Exemple :
Soit une droite *d* d'équation cartésienne $4x - 5y - 1 = 0$.
Alors le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (5 ; 4) est un vecteur directeur de *d*.

Théorème réciproque :
L'ensemble des points M$(x\,;y)$ tels que $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ est une droite D de vecteur directeur $\vec{u}(-b\,;a)$.

- Admis -

Méthode : Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur

Vidéo https://youtu.be/rLxQIbQkPsQ
Vidéo https://youtu.be/NosYmlLLFB4
Vidéo https://youtu.be/i5WD8IZdEqk

On considère un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.
1) Déterminer une équation cartésienne de la droite *d* passant par le point *A*(3 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (–1 ; 5).

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite *d'* passant par les points *B*(5 ; 3) et *C*(1 ; –3).

III. Équation réduite d'une droite

1) De l'équation cartésienne à l'équation réduite

- Si $b \neq 0$, alors l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite D peut être ramenée à une équation réduite $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Et on note $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$.

Vocabulaire : - m est appelé la **pente** ou le **coefficient directeur** de la droite D.
- p est appelé l'**ordonnée à l'origine** de la droite D.

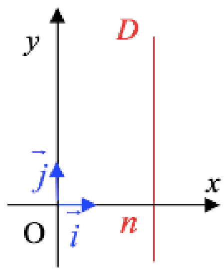
Remarque : Dans l'équation réduite, on retrouve l'expression d'une fonction affine.

- Si $b = 0$, alors l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite D peut être ramenée à l'équation réduite $x = -\frac{c}{a}$. Dans ce cas, la droite D est parallèle à l'axe des ordonnées.

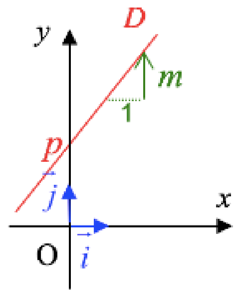
Exemple : Soit *d* dont une droite d'équation cartésienne $4x + y - 6 = 0$.
Son équation réduite est $y = -4x + 6$.

Propriété :
Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan.Soit D une droite du plan.

- Si D est parallèle à l'axe des ordonnées :
alors l'équation de D est de la forme $x = n$,
où n est un nombre réel.



- Si D n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées :
alors l'équation de D est de la forme $y = mx + p$,
où m et p sont deux nombres réels.



Exercice : Donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de chacune des droites d'équations : a) $y = -2x + 3$ b) $y = 5$ c) $4x + 2y = 1$

Méthode : Représenter graphiquement une droite d'équation réduite donnée

Vidéo https://youtu.be/cUdhxkaTqqk

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Dans ce repère, tracer les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations réduites respectives :
$y = 2x + 3$,
$y = 4$,
$x = 3$.

Propriété réciproque :
Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan et m, p, n trois nombres réels, m étant non nul.
L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $\binom{x}{y}$ sont tels que :
$y = mx + p$ ou $x = n$, est une droite.

Méthode : Vérifier si un point appartient à une droite d'équation donnée

Vidéo https://youtu.be/XA0YajthETQ

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Les points A$\binom{6,4}{42}$ et B$\binom{346}{2419}$ appartiennent-ils à la droite *d* d'équation $y = 7x - 3$?

2) Pente d'une droite

Propriété :
Si A$\binom{x_A}{y_A}$ et B$\binom{x_B}{y_B}$ sont deux points distincts d'une droite D tel que $x_A \neq x_B$ alors la droite D a pour pente (ou coefficient directeur) $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Méthode : Déterminer une équation réduite de droite dont on connaît deux points

Vidéo https://youtu.be/tfagLy6QRuw

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Soit A$\binom{4}{-1}$ et B$\binom{3}{5}$ deux points d'une droite *d*.
Déterminer une équation de la droite *d*.

IV. Position relative de deux droites

1) A partir l'aide de l'équation cartésienne

Propriété :
Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan.
Dire que D et D' sont parallèles entre-elles équivaut à dire qu'elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Méthode : Démontrer que deux droites sont parallèles

Vidéo https://youtu.be/NjsVdVolhvU

Démontrer que les droites d_1 et d_2 d'équations respectives $6x - 10y - 5 = 0$ et $-9x + 15y = 0$ sont parallèles.

Le vecteur $\vec{u}(10\,;6)$ est un vecteur directeur de la droite d_1.
Le vecteur $\vec{v}(-15\,;-9)$ est un vecteur directeur de la droite d_2.
Calculons $det(\vec{u}\,;\vec{v})$:

$$det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{vmatrix} 10 & -15 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = 10 \times (-9) - 6 \times (-15) = 0$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et donc les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

2) <u>A l'aide de l'équation réduite</u>

Propriété :
Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Soit D et D' deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées.
Dire que D et D' sont parallèles entre-elles équivaut à dire qu'elles ont le même coefficient directeur.

<u>Tableau récapitulatif :</u>

Equation de D	$x = n$	$y = mx + p$	$y = mx + p$	
Equation de D'	$x = n'$	$x = n$	$y = m'x + p'$	
Position de D et D'	D // D'	D et D' sont sécantes	Si $m = m'$ D // D'	Si $m \neq m'$ D et D' sont sécantes
Représentation