INÉQUATIONS

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/kbTWwWQ9tYo

Partie 1 : Inéquations du premier degré

Définitions :
Une **inéquation** est inégalité qui contient un nombre inconnu noté x.
Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient cette inégalité.

Exemple : L'inégalité $2x+1>4$ est une inéquation. Les solutions sont toutes les valeurs de x qui vérifient $2x+1>4$.
Par exemple, $x=10$ convient. $x=20$ convient également.

Méthode : Résoudre une inéquation

Vidéo https://youtu.be/ycYfb8aHssY

Résoudre les inéquations suivantes et représenter les solutions sur une droite graduée :
a) $2x+3<4-5x$ b) $2(x-4)\leq 4x-5$

Correction

a) Pour résoudre une inéquation, on utilise les mêmes techniques que pour résoudre une équation.

$2x+3<4-5x$

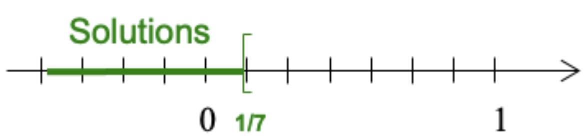
$2x+5x<4-3$

$7x<1$

$x<\frac{1}{7}$

Les solutions sont tous les nombres strictement inférieurs à $\frac{1}{7}$.

$S=\left]-\infty\,;\frac{1}{7}\right[$



b) $2(x-4) \leq 4x-5$

$2x - 8 \leq 4x - 5$

$2x - 4x \leq 8 - 5$

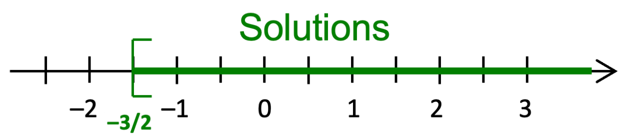
$-2x \leq 3$

$x \geq \dfrac{3}{-2}$ On divise par un nombre négatif donc on change le sens de l'inégalité.

$x \geq -\dfrac{3}{2}$

Les solutions sont tous les nombres supérieurs à $-\dfrac{3}{2}$.

$S = \left[-\dfrac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[$



Partie 2 : Tableaux de signes

<u>Exemple d'introduction</u>

Voici un tableau de valeurs de l'expression $2x - 10$:

x	−10	−5	0	1	6	7	10	100
$2x-10$	−30	−20	−10	−8	2	4	10	190

Déterminons pour quelle valeur de x l'expression $2x - 10$ s'annule :

$2x - 10 = 0$

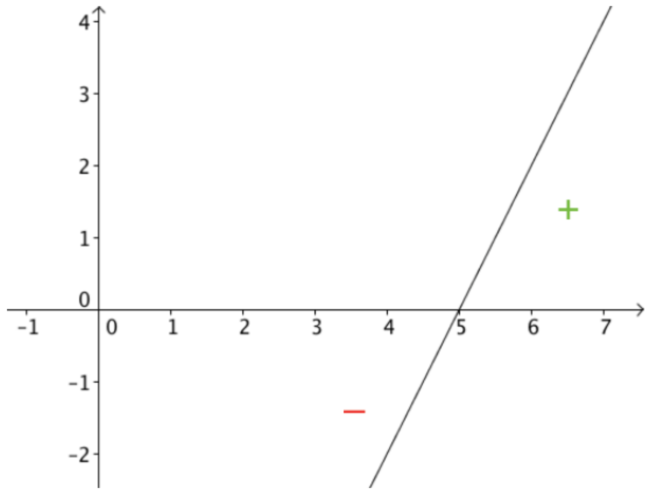
$2x = 10$

$x = \dfrac{10}{2} = 5$

Sachant que $x \longmapsto 2x - 10$ est une fonction affine représentée par une droite, on peut déduire le tableau de signes de $2x - 10$:

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$2x-10$		$-$	0	$+$	

En traçant la représentation graphique de $x \longmapsto 2x - 10$, on retrouve ce résultat.



⚠ On pourra retenir une petite astuce permettant d'obtenir les signes en fonction du coefficient a dans $ax + b$:
« Si a est $+$, on commence par $-$ dans le tableau de signes, puis $+$. »
« Si a est $-$, on commence par $+$ dans le tableau de signes, puis $-$. »

Méthode : Déterminer le signe d'une expression du type $ax + b$

▶ **Vidéo** https://youtu.be/zZ9SbX8mC2o

Déterminer le tableau de signes des expressions
a) $2x + 6$ b) $-3x + 12$

Correction
a) Ici, $a = 2$ est $+$, on commence par $-$ dans le tableau :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$2x + 6$		$-$	0	$+$	

$$2x + 6 = 0$$
$$2x = -6$$
$$x = \frac{-6}{2} = -3$$

b) Ici, $a = -3$ est $-$, on commence par $+$ dans le tableau :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$-3x + 12$		$+$	0	$-$	

$$-3x + 12 = 0$$
$$-3x = -12$$
$$x = \frac{-12}{-3} = 4$$

Méthode : Déterminer le signe d'une expression du type $(ax+b)(cx+d)$

Vidéo https://youtu.be/50CByVTP4ig

Dresser le tableau de signe de l'expression $(3x-9)(1-2x)$.

Correction

On cherche à étudier le signe de l'expression $(3x-9)(1-2x)$, c'est-à-dire savoir pour quelles valeurs de x, elle est positive ou négative.
Le signe de $(3x-9)(1-2x)$ dépend du signe de chaque facteur $(3x-9)$ et $(1-2x)$.

On a :

$3x-9=0$
$3x=9$
$x=\frac{9}{3}$
$x=3$

$1-2x=0$
$-2x=-1$
$x=\frac{-1}{-2}$
$x=\frac{1}{2}$

Résumons dans un tableau de signes les résultats pour les deux facteurs et l'expression $(3x-9)(1-2x)$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$3x-9$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$1-2x=-2x+1$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$(3x-9)(1-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On utilise la règle des signes.

Partie 3 : Inéquation-produit

Méthode : Résoudre une inéquation-produit

Vidéo https://youtu.be/qoNLr9NkvUE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(3-6x)(x+2)>0$

Correction
Le signe de $(3-6x)(x+2)$ dépend du signe de chaque facteur $(3-6x)$ et $(x+2)$.

On a :

$3-6x=0$
$-6x=-3$
$x=\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2}$

$x+2=0$
$x=-2$

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux facteurs et l'expression $(3-6x)(x+2)$:

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3-6x=-6x+3$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+2=1x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(3-6x)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que $(3-6x)(x+2)$ est strictement positif pour $-2<x<\frac{1}{2}$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(3-6x)(x+2)>0$ est $\left]-2\,;\frac{1}{2}\right[$.

Partie 4 : Inéquation-quotient

Méthode : Résoudre une inéquation-quotient

Vidéo https://youtu.be/Vitm29q8AEs

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\frac{2-6x}{3x-2}\leq 0$.

Correction

Le signe de $\frac{2-6x}{3x-2}$ dépend du signe des expressions $(2-6x)$ et $(3x-2)$.

On a :

$2-6x=0$
$-6x=-2$
$x=\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}$

$3x-2\neq 0$ ← Ici, le dénominateur n'est pas nul.
$3x\neq 2$
$x\neq\frac{2}{3}$

Résumons dans un même tableau de signes les résultats $(2-6x)$ et $(3x-2)$ et $\frac{2-6x}{3x-2}$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$2-6x$		$+$	0	$-$		$-$	
$3x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2-6x}{3x-2}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

La double-barre dans le tableau signifie que le quotient n'est pas défini pour $x = \frac{2}{3}$.

On en déduit que $\frac{2-6x}{3x-2}$ est négatif pour $x \leq \frac{1}{3}$ et $x > \frac{2}{3}$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{2-6x}{3x-2} \leq 0$ est $S = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{2}{3}\,;\,+\infty\right[$.