# ÉQUATIONS

**Tout le cours sur les équations en vidéo : https://youtu.be/WoTpA2RyuVU**

## Partie 1 : Équations du premier degré

But : Trouver $x$ !
C'est-à-dire : isoler $x$ dans l'équation pour arriver à :
$x$ = nombre

Méthode : Résoudre une équation du premier degré

**Vidéo https://youtu.be/quzC5C3a9jM**

Résoudre les équations : a) $-5x+3=-3x+2$
b) $3(x+4)=-(x+5)+2$

**Correction**

1) $-5x+3=-3x+2$

$-5x+3x=2-3$ ← On ramène les « $x$ » à gauche et les « nombres » à droite.

$-2x=-1$ ← Réduire

$x=\frac{-1}{-2}$ ← On divise par $-2$.

$x=\frac{1}{2}$

2) $3(x+4)=-(x+5)+2$

$3x+12=-x-5+2$ On applique la distributivité

$3x+x=-12-5+2$

$4x=-15$

$x=-\frac{15}{4}$

## Partie 2 : Équation-produit

➤ Équation du type : $P(x)\times Q(x)=0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions littérales.

Propriété : Si $A\times B=0$ alors $A=0$ ou $B=0$.

Autre formulation :
Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Méthode : Résoudre une équation-produit

**Vidéo** https://youtu.be/EFgwA5f6-40
**Vidéo** https://youtu.be/sMvrUMUES3s

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $(4x+6)(3-7x)=0$
b) $(3x+1)(1-6x)-(3x+7)(3x+1)=0$
c) $5x^2-4x=0$

**Correction**
a) $(4x+6)(3-7x)=0$
Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Soit : $4x+6=0$ ou $3-7x=0$

$4x=-6$ ; $-7x=-3$

$x=-\frac{6}{4}$ ; $x=\frac{-3}{-7}$

$x=-\frac{3}{2}$ ; $x=\frac{3}{7}$

L'équation a deux solutions : $-\frac{3}{2}$ et $\frac{3}{7}$.

On note : $S=\left\{-\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{7}\right\}$.

b) On commence par factoriser l'expression pour se ramener à une équation-produit :
$(3x+1)(1-6x)-(3x+7)(3x+1)=0$
$(3x+1)[(1-6x)-(3x+7)]=0$
$(3x+1)(1-6x-3x-7)=0$
$(3x+1)(-9x-6)=0$
Soit : $3x+1=0$ ou $-9x-6=0$

$3x=-1$ ; $-9x=6$

$x=-\frac{1}{3}$ ; $x=\frac{6}{-9}=-\frac{2}{3}$

L'équation a deux solutions : $-\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$.

On note : $S=\left\{-\frac{2}{3}\,;\,-\frac{1}{3}\right\}$.

c) $5x^2-4x=0$
$x(5x-4)=0$
Soit : $x=0$ ou $5x-4=0$

$5x=4$

$$x = \frac{4}{5}$$

L'équation a deux solutions : 0 et $\frac{4}{5}$.

On note : $S = \left\{0\ ;\ \frac{4}{5}\right\}$.

## Partie 3 : Équation de la forme $x^2 = a$

Propriété : Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = a$ dépendent du signe de $a$.
Si $a < 0$, alors l'équation n'a pas de solution.
Si $a = 0$, alors l'équation possède une unique solution qui est 0.
Si $a > 0$, alors l'équation possède deux solutions qui sont $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

Démonstration :

- Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution car un carré est toujours positif.
- Si $a = 0$, alors l'équation s'écrit $x^2 = 0$ donc $x = 0$.
- Si $a > 0$ : $x^2 = a$ équivaut à : $x^2 - a = 0$
  Soit $\left(x - \sqrt{a}\right)\left(x + \sqrt{a}\right) = 0$
  $x - \sqrt{a} = 0$ ou $x + \sqrt{a} = 0$

L'équation possède deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

Méthode : Résoudre une équation de la forme $x^2 = a$

**Vidéo** https://youtu.be/ef15aeQRs6w

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
a) $x^2 = 16$ b) $x^2 = -8$ c) $(x + 2)^2 = 9$.

**Correction**
a) L'équation $x^2 = 16$ possède deux solutions : $x = -\sqrt{16} = -4$ et $x = \sqrt{16} = 4$.
On note : $S = \{-4\ ;\ 4\}$.

b) L'équation $x^2 = -8$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car $-8$ est négatif.
On note : $S = \emptyset$.

c) L'équation $(x + 2)^2 = 9$ possède deux solutions :
$x + 2 = -\sqrt{9}$ et $x + 2 = \sqrt{9}$
Soit : $x = -3 - 2 = -5$ et $x = 3 - 2 = 1$
L'équation a deux solutions : $-5$ et $1$.
On note : $S = \{-5\ ;\ 1\}$.

## Partie 4 : Équation-quotient

➤ Équation du type : $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions littérales ($Q(x) \neq 0$).

Propriété : Si $\frac{A}{B} = 0$ alors $A = 0$ et $B \neq 0$.

Exemple :
L'équation $\frac{x+2}{x+3} = 0$ a pour solution $x = -2$.

Méthode : Résoudre une équation-quotient

Vidéo https://youtu.be/zhY1HD4oLHg
Vidéo https://youtu.be/OtGN4HHwEek

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $\frac{3x+5}{x-1} = 0$ b) $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4} = 0$ c) $\frac{x^2-9}{x+3} = 0$ d) $\frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{x-3}$

e) *Pour les experts :* $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$

**Correction**

a) L'équation $\frac{3x+5}{x-1} = 0$ n'est pas définie pour $x - 1 = 0$, soit pour $x = 1$.

Pour $x \neq 1$, l'équation $\frac{3x+5}{x-1} = 0$ équivaut à : $3x + 5 = 0$

$$3x = -5$$
$$x = -\frac{5}{3}.$$

On note : $S = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$.

b) L'équation $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4} = 0$ n'est pas définie pour $x - 4 = 0$, soit pour $x = 4$.

Pour $x \neq 4$, l'équation $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4} = 0$ équivaut à : $(2x + 1)(x - 3) = 0$

Soit : $2x + 1 = 0$ ou $x - 3 = 0$

$2x = -1$ $x = 3$

$x = -\frac{1}{2}$

Les solutions sont : $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 3$.

On note : $S = \left\{-\frac{1}{2}\ ;\ 3\right\}$.

c) L'équation $\frac{x^2-9}{x+3} = 0$ n'est pas définie pour $x + 3 = 0$, soit pour $x = -3$.

Pour $x \neq -3$, l'équation $\frac{x^2-9}{x+3} = 0$ équivaut à : $x^2 - 9 = 0$, soit $x^2 = 9$

Soit encore : $x = -\sqrt{9} = -3$ ou $x = \sqrt{9} = 3$.

Comme $x \neq -3$, l'équation a pour unique solution : $x = 3$.

On note : $S = \{3\}$.

d) L'équation $\frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{x-3}$ n'est pas définie pour : $x - 3 = 0$, soit pour $x = 3$.

Pour $x \neq 3$, l'équation $\frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{x-3}$ équivaut à : $\frac{x+3}{x-3} - \frac{2}{x-3} = 0$.

On réduit au même dénominateur dans le but de se ramener à une équation-quotient :

$\frac{x+3-2}{x-3} = 0$

$\frac{x+1}{x-3} = 0$

Pour $x \neq 3$, l'équation équivaut à $x + 1 = 0$.

D'où $x = -1$.

On note : $S = \{-1\}$.

e) L'équation $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$ n'est pas définie pour $x = 2$ et $x = 3$.

Pour $x \neq 2$ et $x \neq 3$, l'équation $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$ équivaut à : $1 - \frac{x+3}{x-3} - \frac{2}{2-x} = 0$

On réduit au même dénominateur dans le but de se ramener à une équation-quotient :

$\frac{(x-3)(2-x)}{(x-3)(2-x)} - \frac{(x+3)(2-x)}{(x-3)(2-x)} - \frac{2(x-3)}{(2-x)(x-3)} = 0$

$\frac{(x-3)(2-x)-(x+3)(2-x)-2(x-3)}{(x-3)(2-x)} = 0$

On développe et on réduit le numérateur :

$\frac{2x-x^2-6+3x-2x+x^2-6+3x-2x+6}{(x-3)(2-x)} = 0$

$\frac{4x-6}{(x-3)(2-x)} = 0$

Ce qui équivaut à $4x - 6 = 0$.
D'où $x = \frac{3}{2}$.
On note : $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.