
1) Calcul propositionnel

a) Proposition :

Exemples.

a – En anglais, dans les langages informatiques on utilise des variables logiques, que l'on déclare de type *booléen* et qui peuvent prendre soit la valeur TRUE (vrai) soit la valeur FALSE (faux) :

`VAR x, y, z : BOOLEAN;` (en PASCAL)

`boolean x, y, z;` (en Java)

Suivant les langages on leur affectera les valeurs de vérité en écrivant 0, 1, `FALSE` ou `TRUE` :

```
x := TRUE;
x = 1;
```

b – Soient les propositions p, q, …, écrivons leurs valeurs de vérité :

proposition	le nom de la proposition	vrai ou faux	V ou F	0 ou 1
$253\,456 \in N$	p	vrai	V	1
457, 2 est un entier pair	q	faux	F	0
$35 + 22 \leq 57$	r	vrai	V	1
le 22 octobre est un jour férié	s			
L'année 1 990 est bissextile	t			
L'année 2 000 est bissextile	u			

À RETENIR

Une **proposition** a un sens dans la théorie où l'on se place.
À toute proposition on peut associer une valeur de vérité, soit vrai (noté V ou 1), soit faux (noté F ou 0).

b) Négation :

Définition : La négation d'une proposition logique p est la proposition non-p, souvent notée $\overline{p}$ ou encore $\neg p$.

Si la valeur de vérité de p est **Vrai**, celle de sa négation $\overline{p}$ est **Faux**.

Si la valeur de vérité de p est **Faux**, celle de sa négation $\overline{p}$ est **Vrai**.

Table de vérité de la négation On indique dans le tableau suivant les valeurs de vérité possibles pour une proposition p et sa négation $\overline{p}$, c'est la *table de vérité* de p.

p	$\overline{p}$
Faux	Vrai
Vrai	Faux

Mais on simplifiera le plus souvent en :

p	$\overline{p}$
F	V
V	F

c) Conjonction :

Définition : La conjonction des deux propositions logiques p, q est la proposition notée « p et q », ou encore $p \wedge q$ ou parfois encore $p \cdot q$, pq.

p et q est **Vrai** si et seulement si p est Vrai, q est Vrai,

p et q est **Faux** lorsque l'une au moins des deux propositions p et q est fausse.

Table de vérité de la conjonction

p	q	p et q
F	F	
F	V	
V	F	
V	V	

d) Disjonction :

À RETENIR

À tout couple de propositions (P, Q), la **disjonction** associe la proposition, notée $P \vee Q$, dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-contre.

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exemples

Reprenons les trois exemples du début du paragraphe **A**.

$A \vee B : 2^{10} = 1\,024$ ou $5 < 4$.

C'est une proposition vraie car A est vrai.

$A \vee C : 2^{10} = 1\,024$ ou 3 est un nombre impair.

C'est une proposition vraie

e)Implication :

À RETENIR

À tout couple de propositions (P, Q), l'**implication** associe la proposition, notée $P \Rightarrow Q$, dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-contre.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Il s'agit des raisonnements du type « **si P, alors Q** », où P est l'hypothèse et Q la conclusion.

Remarque : La notation $p \Leftarrow q$ peut se comprendre comme $q \Rightarrow p$. En exercice on peut dresser sa table de vérité.
$p \Leftarrow q$ peut se lire « p si q » ou « p se déduit de q »

d)Équivalence :

À RETENIR

À tout couple de propositions (P, Q), l'**équivalence** associe la proposition, notée $P \Leftrightarrow Q$, dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-contre.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

La proposition $P \Leftrightarrow Q$ est vraie dans les seuls cas où les propositions P, Q ont même valeur de vérité (soit V ou 1, soit F ou 0).

Exemples

Reprenons les trois exemples du début du paragraphe **A**.

A $\Leftrightarrow$ B : $2^{10} = 1\,024 \Leftrightarrow 5 < 4$.

A $\Leftrightarrow$ B est une proposition fausse car A est vrai et B est faux.

A $\Leftrightarrow$ C : $2^{10} = 1\,024 \Leftrightarrow$ (3 est un nombre impair).

A $\Leftrightarrow$ C est une proposition vraie car A est vrai et C est vrai.

Ici, comme pour l'implication, il ne faut pas chercher de lien entre les contenus des propositions A et C.

f)Premières propriétés des connecteurs :

• ***Commutativité de*** $\vee$ ***et*** $\wedge$

PROPRIÉTÉS

Pour toutes propositions P, Q,

$$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P,$$
$$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P.$$

- ***Double distributivité***

PROPRIÉTÉS

Pour toutes propositions P, Q, R,

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R),$$
$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R).$$

Pour démontrer la première équivalence, nous allons construire dans un même tableau la table de vérité des propositions situées de part et d'autre du signe $\Leftrightarrow$.

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
1	1	1					
1	1	0					
1	0	1					
1	0	0					
0	1	1					
0	1	0					
0	0	1					
0	0	0					

Nous remarquons que, dans chacun des huit cas, les deux propositions $P \vee (Q \wedge R)$, $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ ont même valeur de vérité et sont donc équivalentes.

La seconde équivalence peut se démontrer de la même façon.

- ***Élément neutre***

Soit P une proposition quelconque ; considérons les deux propositions $P \Leftrightarrow P$, $P \Leftrightarrow (\neg P)$.

- ***Tiers exclu et non contradiction***

PROPRIÉTÉS

Pour toute proposition P,

$P \vee (\neg P) \Leftrightarrow \mathscr{V}$,

$P \wedge (\neg P) \Leftrightarrow \mathscr{F}$,

où $\mathscr{V}$ est une proposition toujours vraie et $\mathscr{F}$ une proposition toujours fausse.

P	$\neg P$	$P \vee (\neg P)$
1	0	1
0	1	1

d'après la table de vérité de $\neg$ et les lignes 2 et 3 de la table de vérité de $\vee$.

P	$\neg P$	$P \wedge (\neg P)$
1	0	0
0	1	0

d'après la table de vérité de $\neg$ et les lignes 2 et 3 de la table de vérité de $\wedge$.

Nous reviendrons sur ces quatre premières propriétés des connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\neg$ dans les parties **2** et **3**.

• ***Implication et équivalence***

PROPRIÉTÉS

Pour toutes propositions P, Q,

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q),$$

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)).$$

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$\neg Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
1	1	1	0	1		
1	0	0	0	0		
0	1	1	1	1		
0	0	1	1	1		

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

2) Calculs des prédicats :

a) Variable et constante :

Exemples

- Dans la proposition $5 < 4$, les deux nombres situés de part et d'autre du symbole $<$ sont des **constantes**.

En mathématiques on rencontre des expressions du type $x < 4$; ici x peut varier, par exemple dans $\mathbb{R}$.

Pour $x = 5$, $x < 4$ s'écrit $5 < 4$; c'est une proposition dont la valeur de vérité est F ou 0.

Plus généralement, pour toute valeur numériquement fixée de x, $x < 4$ devient une proposition dont la valeur de vérité est V si la valeur de x appartient à $]-\infty, 4[$ et F si celle-ci appartient à $[4, +\infty[$.

On note $p(x)$ une expression telle que $x < 4$ dans laquelle figure une **variable** x.

À toute valeur numérique de x choisie dans $\mathbb{R}$, le **prédicat p à une variable** associe la proposition obtenue en remplaçant dans $p(x)$, x par sa valeur numérique.

b)Quantificateurs :

Proposition 1

« Il existe x tel que $x < 4$ (soit vrai) ».

Ceci s'écrit à l'aide du symbole $\exists$ appelé **quantificateur existentiel** :

$$\exists x, \quad x < 4.$$

Proposition 2

« Pour tout x, (on a) $x < 4$ ».

Ceci s'écrit à l'aide du symbole $\forall$ appelé **quantificateur universel** :

$$\forall x, \quad x < 4.$$

• Avec un **prédicat à deux variables** on peut, de même, définir de nouvelles propositions.

Par exemple, lorsque $p(x, y)$ est $x < y$ où x et y sont des variables réelles, nous pouvons notamment définir les propositions suivantes :

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x < y.$$

Cette proposition est vraie car $x = 0$ et $y = 1$ conviennent.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x < y.$$

Cette proposition est fausse car, pour $x = 3$ et $y = 2$, la proposition $3 < 2$ est fausse.

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x < y.$$

C'est une proposition fausse car, dans $\mathbb{R}$, il n'existe pas de nombre strictement inférieur à tous les nombres.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x < y.$$

c)Négation d'une proposition qui commence par des Quantificateur :

PROPRIÉTÉ

La **négation** de $\exists x, p(x)$ est $\forall x, \neg p(x)$.

PROPRIÉTÉ

La **négation** de $\forall x, p(x)$ est $\exists x, \neg p(x)$.

Exercice s:

Enoncé

"S'il pleut, Abel prend un parapluie. Béatrice ne prend jamais de parapluie s'il ne pleut pas et en prend toujours un quand il pleut". Que peut-on déduire de ces affirmations dans les différentes situations ci-dessous? Justifier soigneusement vos réponses en introduisant 3 propositions logiques p, q et r.

1. Abel se promène avec un parapluie.
2. Abel se promène sans parapluie.
3. Béatrice se promène avec un parapluie.
4. Béatrice se promène sans parapluie.
5. Il ne pleut pas.
6. Il pleut.

Corrigé

Notons $p =$"il pleut", $q =$"Abel a un parapluie" et $r =$"Béatrice a un parapluie". L'énoncé nous dit que $p \implies q$ et que $p \iff r$.

1. Dans cette situation, on nous dit que q est vraie. On ne peut rien conclure.
2. non q est vraie. Or, on sait (contraposée de $p \implies q$) que (non $q \implies$ non p). Donc il ne pleut pas.
3. r est vraie, et r équivaut à p. Donc il pleut.
4. non r est vraie et non r équivaut à non p donc il ne pleut pas.
5. non p est vraie et non p équivaut à non r donc Béatrice se promène sans parapluie.
6. p est vraie or $p \implies q$ et $p \iff r$ donc Abel et Béatrice ont tous deux leur parapluie.

Exercice 2

Enoncé

Parmi toutes les propositions suivantes, regrouper par paquets celles qui sont équivalentes :

1. Tu auras ton examen si tu travailles régulièrement.
2. Pour avoir son examen, il faut travailler régulièrement.
3. Si tu ne travailles pas régulièrement, tu n'auras pas ton examen.
4. Il est nécessaire de travailler régulièrement pour avoir son examen.
5. Pour avoir son examen, il suffit de travailler régulièrement.
6. Ne pas travailler régulièrement entraîne un échec à l'examen.
7. Si tu n'as pas ton examen, c'est que tu n'as pas travaillé régulièrement.
8. Travail régulier implique réussite à l'examen.
9. On ne peut avoir son examen qu'en travaillant régulièrement

Corrigé

Notons P la proposition "Avoir son examen" et Q la proposition "Travailler régulièrement". Nous allons écrire les propositions sous la forme $P \implies Q$ ou $Q \implies P$.

1. La proposition est clairement $Q \implies P$.
2. La proposition est $P \implies Q$.
3. La proposition est $\bar{Q} \implies \bar{P}$. C'est une proposition équivalente à sa contraposée, $P \implies Q$.
4. Même signification que 2., $P \implies Q$.
5. Cette fois, on a $Q \implies P$.
6. La proposition est $\bar{Q} \implies \bar{P}$, qui est équivalente à $P \implies Q$.
7. Cette fois, on a $\bar{P} \implies \bar{Q}$, qui est équivalente à $Q \implies P$.
8. Tout simplement, $Q \implies P$.
9. C'est la même chose que 2, à savoir $P \implies Q$.

Les propositions 1, 5, 7 et 8 sont donc équivalentes, et les proposition 2, 3, 4, 6 et 9 le sont également.

Exercice 3 :

- Jules énonce l'implication suivante :

P_1 : " s' il n'est pas suédois ou s' il joue au tennis alors il est blond "

- Puis Julie énonce la proposition P_2 :

P_2 : " s' il est blond alors il n'est pas suédois ou il joue au tennis "

La proposition P_2 formulée par Julie ___________ de la proposition P_1 énoncée par Jules.

Compléter par « la contraposée » , « la réciproque » ou ni l'un ni l'autre.

Implication en langage naturel

L'implication $A \rightarrow B$ (si A alors B) :

- L'implication $A \rightarrow B$ est vraie si et seulement si A est faux ou B est vrai.
- Les propositions $A \rightarrow B$ et $\bar{A}$ ou B sont logiquement équivalentes.
  (c'est à dire qu'elles ont les mêmes tables de vérité.)
- Les propositions $A \rightarrow B$ et $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$ sont logiquement équivalentes.
- D'où les règles de déduction :
  Modus Ponens : des deux hypothèses $A \rightarrow B$ et A, on peut déduire B
  Contraposition : des deux hypothèses $A \rightarrow B$ et $\bar{B}$, on peut déduire $\bar{A}$
  Mais des hypothèses $A \rightarrow B$ et $\bar{A}$ on ne peut rien déduire.

Exercice 4 :

Question 2.

Nos personnages sont Nestor le moineau, Bubu le ver de terre et Fred le chien. On donne les implications suivantes, qu'on suppose toutes deux vraies :

- **Chaque fois que Nestor vire-volte dans le parc alors Bubu s'enfouit sous terre**
- **Chaque fois que Bubu s'enfouit sous terre alors Fred farfouille dans la terre**

Sans faire aucune autre hypothèse, que peut-on dire qu'il se passe lorsque Bubu ne s'enfouit pas sous terre ?

☐ Nestor vire-volte dans le parc, ☐ Nestor ne vire-volte pas dans le parc, ☐ Fred farfouille dans la terre, ☐ Fred ne farfouille pas dans la terre, ☐ on ne peut rien conclure

Question 1.
Nos personnages sont Nestor le moineau et Bubu le ver de terre. On donne l'implication suivante, qu'on suppose vraie :

Chaque fois que Nestor vire-volte dans le parc alors Bubu s'enfouit sous terre

Sans faire aucune autre hypothèse, que peut-on dire qu'il se passe lorsque Nestor vire-volte dans le parc ?

○ Bubu s'enfouit sous terre, ○ Bubu ne s'enfouit pas sous terre, ○ on ne peut rien conclure

Implication en langage naturel

L'implication $A \to B$ (si A alors B) :

- L'implication $A \to B$ est vraie si et seulement si A est faux ou B est vrai.
- Les propositions $A \to B$ et $\bar{A}$ ou B sont logiquement équivalentes.
  (c'est à dire qu'elles ont les mêmes tables de vérité.)
- Les propositions $A \to B$ et $\bar{B} \to \bar{A}$ sont logiquement équivalentes.
- D'où les règles de déduction :
  Modus Ponens : des deux hypothèses $A \to B$ et A, on peut déduire B
  Contraposition : des deux hypothèses $A \to B$ et $\bar{B}$, on peut déduire $\bar{A}$
  Mais des hypothèses $A \to B$ et $\bar{A}$ on ne peut rien déduire.