Matrice 2

II. Suites de matrices colonnes

1) Exemples :

a-

b) Soit deux suites numériques couplées (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par : $u_0 = 2$, $v_0 = 4$ et $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 3v_n + 1 \\ v_{n+1} = -u_n + 5v_n - 4 \end{cases}$

c) Soit une suite numérique (u_n) définie par une relation de récurrence d'ordre 2 :
$u_0 = 2$, $u_1 = -1$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.
On pose pour tout entier naturel n : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$

2) Terme général d'une suite de matrices

Démonstration :

Méthode : Calculer des termes d'une suite à l'aide de matrices

Vidéo https://youtu.be/62U34Kl4o1I

Soit deux suites numériques couplées (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par : $u_0 = 1$, $v_0 = -1$ et $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n \\ v_{n+1} = -2u_n + 2v_n \end{cases}$

Calculer u_6 et v_6.

3) Convergence de suites de matrices colonnes

Définitions : On dit qu'une suite de matrices colonnes (U_n) de taille p est **convergente** si les p suites dont les termes sont les p coefficients de (U_n) sont convergentes.
La **limite** de cette suite est la matrice colonne dont les coefficients sont les p limites obtenues.
Dans tous les autres cas, on dit que la suite est **divergente**.

Exemples :

Vidéo https://youtu.be/dbP7R-9Q2_s

a) La suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = \begin{pmatrix} n^2 \\ 3n+1 \end{pmatrix}$ est divergente car $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n\to\infty} 3n+1 = +\infty$.

Propriété : (U_n) est une suite de matrices colonnes de taille p définie par la relation matricielle de récurrence $U_{n+1} = AU_n + B$ où A est une matrice carrée de taille p et B est une matrice colonne à p lignes.
Si la suite (U_n) est convergente alors sa limite U est une matrice colonne vérifiant l'égalité $U = AU + B$.

Démonstration :

Méthode : Recherche d'une suite constante de matrices vérifiant une relation de récurrence

Vidéo https://youtu.be/C-2-1yf-O4A

Soit une suite (U_n) de matrices colonnes définies pour tout entier naturel n par $U_{n+1} = AU_n + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 0{,}5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Rechercher, si elle existe, la suite (U_n) constante.