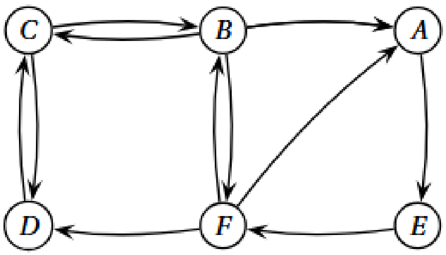
Exercice 1 :

Le fournisseur doit livrer 5 entreprises. Le réseau de transport est représenté par le graphe orienté donné ci-dessous où l'entrepôt du fournisseur est noté F, et les entreprises sont notées A, B, C, D, E.



1. Écrire la matrice d'adjacence M de ce graphe en considérant les sommets notés A, B, C, D, E, et F dans cet ordre.

2. Le fournisseur souhaite livrer chacune des entreprises. Il part de son entrepôt.
   a. Existe-t-il un chemin hamiltonien d'origine F dans ce graphe ? Si oui, citer un tel chemin.
   b. Interpréter le résultat relativement aux possibilités de livraison.

3. On donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   a. Dans le contexte de l'exercice, interpréter le coefficient 2 situé sur la quatrième ligne et la troisième colonne de la matrice M^3.
   b. Combien existe-t-il de chemins de longueur 3 issus du sommet D dans ce graphe ? Justifier puis citer ces chemins.
   c. Le fournisseur doit maintenant effectuer une livraison, depuis l'entrepôt, dans quatre entreprises en commençant par l'entreprise D.
   Montrer que, pour effectuer cette livraison sans repasser par une entreprise déjà livrée, le fournisseur n'a qu'un seul chemin possible.
   Expliquer la démarche et préciser ce chemin.

Exercice 2 :

Dans le lycée DUJARDIN, les classes de BTS informatique de gestion disposent de 4 salles spécialisées A, B, C, D. Trois portes, permettant le passage dans les deux sens, relient les salles A et B, les salles A et C et les salles B et D.

1. Dessiner une représentation du graphe G orienté associé au passage d'une salle à l'autre.
2. Justifier que la matrice d'adjacence M du graphe G est : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. Calculer la matrice M^2 et justifier qu'il existe 6 circuits de longueur 2.
4. On donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
   - **a.** Déterminer le nombre de chemins de longueur 3.
   - **b.** Donner la liste des chemins de longueur 3 ayant pour origine A et pour extrémité B.
   - **c.** Le graphe admet-il des circuits de longueur 3 ? Justifier la réponse donnée.
5. Matrices et opérations booléennes.
   - **a.** Écrire les deux matrices booléennes $M^{[2]}$ et $M^{[3]}$.
   - **b.** Calculer la somme $M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]}$ où $\oplus$ désigne l'addition booléenne des matrices et en déduire la matrice $\hat{M}$ de la fermeture transitive du graphe G.

Exercice 3 :

Première partie

On considère la matrice carrée d'ordre 5 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Recopier et compléter les matrices :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deuxième partie

Soit (**G**) le graphe à 5 sommets ($a,\ b,\ c,\ d,\ e$) dont la matrice d'adjacence est A.

1. D'après les calculs de la première partie :
   a. Combien existe-t-il de chemins de longueurs 2 ayant pour origine le sommet c ?
   b. Existe-t-il dans ce graphe un chemin hamiltonien ?
2. Faire le tableau des prédécesseurs du graphe (**G**). Donner le niveau de chacun des sommets.

   On pourra par exemple utiliser l'algorithme suivant :
   — les sommets sans prédécesseur sont de niveau 0 ;
   — on barre les sommets de niveau 0. Les sommets qui n'ont alors plus de prédécesseur sont de niveau 1 ;
   — on barre les sommets de niveau 1. Les sommets qui n'ont alors plus de prédécesseur sont de niveau 2 ;
   — on continue jusqu'à ce qu'on ait établi le niveau de chaque sommet.
3. Dessiner le graphe CG) ordonné par niveau.