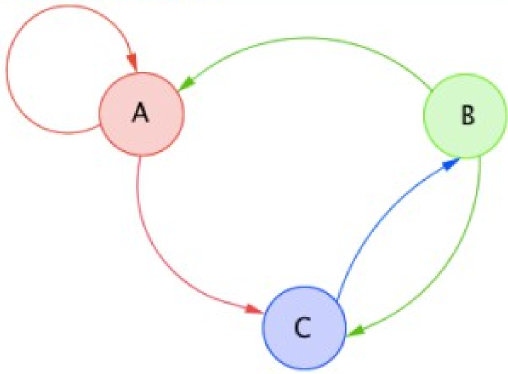
Graphes 2

1) Graphes orientés

Définitions : - Un graphe est **orienté** si ses arêtes, appelées **arcs** dans ce cas, ont un sens de parcours.
- Un **chemin** est une succession d'arcs mis bout à bout.
- Un **circuit** est un chemin fermé dont les arcs sont tous distincts.

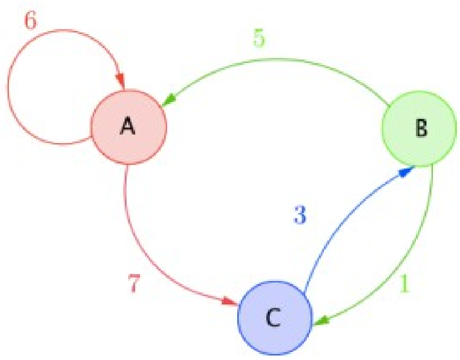
Exemple :
Le graphe orienté ci-contre est d'ordre 3 car il possède 3 sommets.
Il possède une boucle sur le sommet A.
A – C – B est un chemin de longueur 2.
B – C – B – A – A – C – B est un chemin fermé de longueur 6.
A – C – B – A est un circuit de longueur 3.



2) Graphes pondérés

Définitions : - Un graphe est **étiqueté** si ses arêtes (ou ses arcs) sont affectés d'étiquettes (mots, lettres, symboles, nombres, …)
- Dans le cas où les étiquettes sont des nombres, le graphe est dit **pondéré**. Les étiquettes sont appelées les **poids** entre les sommets.
- Le poids du chaîne (respectivement d'un chemin) est la somme des poids des arêtes (respectivement des arcs) constituant la chaîne (respectivement le chemin).

Exemple :
Le graphe orienté ci-contre est pondéré.
Le poids entre le sommet B et le sommet A est égal à 5.
Le poids du chemin B – C – B – A est égal à :
1 + 3 + 5 = 9



Vidéo https://youtu.be/ZEiOWcqX7S4

Remarque :
Le chemin le plus court entre deux sommets est le chemin qui a le poids minimum.

Remarque :
Le chemin le plus court entre deux sommets est le chemin qui a le poids minimum.

3) Matrice d'adjacence associée à un graphe orienté

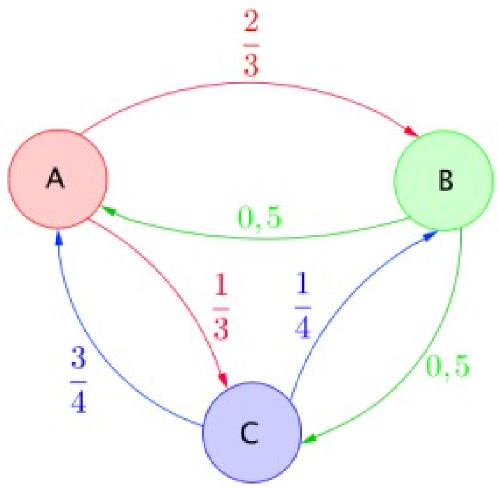
Définition : Soit un graphe G orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n.
La **matrice d'adjacence** associée à G est la matrice carrée de taille n dont chaque terme a_{ij} est égal au nombre d'arcs orientés reliant le sommet i vers le sommet j.

II. Chaîne de Markov

1) Définition

Dans une équipe de football, on étudie les passes que se font trois attaquants A, B et C.

Les probabilités qu'un attaquant passe le ballon à un autre sont schématisées sur le graphe orienté et pondéré suivant. Chaque passe de ballon correspond à une nouvelle expérience aléatoire dont les issues sont A, B ou C (un des trois attaquants est susceptible de recevoir le ballon).



Par exemple, la probabilité que l'attaquant A passe le ballon à l'attaquant B est égale à $\frac{2}{3}$.

Les poids des arcs sont alors des probabilités.

Un tel schéma est appelé un ______________

Définition : Un ________________ est un graphe orienté et pondéré possédant au plus un arc entre deux sommets et dont la somme des poids des arcs issus d'un même sommet est égale à 1.

2)Marche aléatoire

On considère la variable aléatoire X_n prenant les valeurs A, B ou C à l'étape n.
A, B ou C s'appelle les **états** de X_n.
Par exemple, $X_3 = B$ signifie que l'attaquant B possède le ballon après la 3e passe.
La suite de variables aléatoires (X_n) est appelée **marche aléatoire** ou **chaîne de Markov** sur l'ensemble des issues $\{A ; B ; C\}$.

3) Probabilité de transition

On considère la loi de probabilité de X_n, appelée **probabilité de transition**, qui donne la probabilité qu'un attaquant possède le ballon à l'étape n (n-ième passe).

On note par exemple $P_{X_n=A}(X_{n+1} = C) = \frac{1}{3}$: la probabilité que le ballon se trouve chez l'attaquant C après la $(n+1)$-ième passe sachant que c'est l'attaquant A qui envoie le ballon. Il s'agit d'une probabilité conditionnelle.
Cette probabilité ne dépend pas de n.

4) Matrice de transition

Définition : La **matrice de transition** d'une chaîne de Markov est la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient p_{ij} situé sur la ligne i et la colonne j est la probabilité de transition portée par l'arc reliant le sommet i vers le sommet j s'il existe et 0 dans le cas contraire.

Vidéo https://youtu.be/KRi0C_zOsHs

Dans l'exemple, la matrice de transition est :

$$P = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow Transition\ du\ sommet\ A\ vers\ les\ autres\ sommets \\ \leftarrow Transition\ du\ sommet\ B\ vers\ les\ autres\ sommets \\ \leftarrow Transition\ du\ sommet\ C\ vers\ les\ autres\ sommets \end{array} \\ \begin{array}{ccc} Vers\ A \uparrow & \uparrow Vers\ B & \uparrow Vers\ C \end{array} & \end{array}$$

On trouve par exemple à l'intersection de la première ligne et de la deuxième colonne la probabilité que le ballon arrive chez l'attaquant B alors qu'il se trouvait chez l'attaquant A.

Définition : L'**état probabiliste après n étapes** de la chaîne de Markov est la matrice ligne dont les coefficients sont les probabilités d'arrivée en chaque sommet après n étapes.

Exemple : Dans l'exemple des passeurs au football, la matrice ligne des états après la 3^e étape donnerait les probabilités que le ballon se trouve chez l'attaquant A, chez l'attaquant B et chez l'attaquant C après 3 passes.

Propriété : On considère une chaîne de Markov de matrice de transition P et dont la matrice ligne des états à l'étape n est π_n.
Pour tout entier naturel n, on a : $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$ et $\pi_n = \pi_0 \times P^n$ où π_0 est l'état initial.

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/gxrgpotHfnE

Dans l'exemple précédent, on suppose l'attaquant A possède le ballon à l'étape 0.
La matrice ligne des états après la 3e étape est égale à : $\pi_3 = \pi_0 \times P^3$.

III. Distribution invariante d'une chaîne de Markov

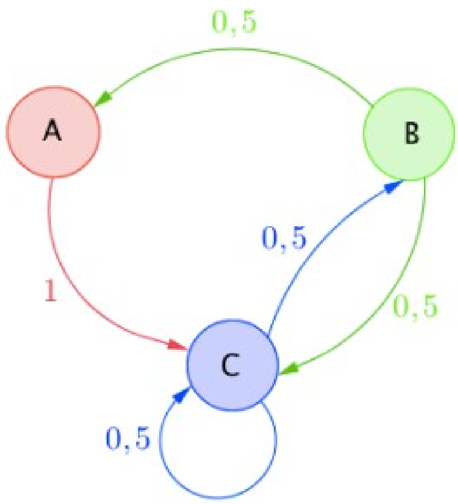
1) Chaîne de Markov convergente

Définition : On dit qu'une **chaîne de Markov de matrice de transition P est convergente** si la suite des matrices lignes (π_n) des états de la chaîne de Markov converge.

Définition : Si la suite (π_n) des états d'une chaîne de Markov convergente vérifie $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$ alors la limite π de cette suite définit un **état stable** solution de l'équation $\pi = \pi P$.

Méthode : Étudier une distribution invariante d'une chaîne de Markov à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel

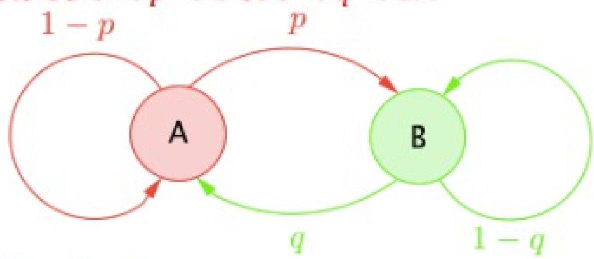
On considère la chaîne de Markov sur le graphe ci-contre où l'on part de A.
A l'aide de la calculatrice, déterminer l'état stable de cette chaîne de Markov. On admet que la chaîne de Markov est convergente (distribution invariante).



La matrice de transition est $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.
Pour tout entier naturel n, on a : $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$, où (π_n) est la suite des matrices lignes des états de la chaîne de Markov.
On a donc : $\pi_n = \pi_0 \times P^n$ avec $\pi_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$ car on part de A.
A l'aide de la calculatrice, calculons par exemple π_{10} :

2) Cas d'un graphe à deux sommets

Propriété : On considère une chaîne de Markov de matrice de transition P sur un graphe à deux sommets où $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$. :

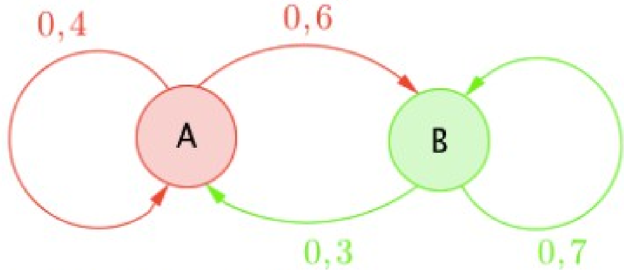


Alors on a : $P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$. Et la suite des matrices lignes (π_n) des états de la chaîne de Markov converge vers un état stable π tel que $\pi = \pi P$.
π ne dépend pas de l'état initial π_0.

Méthode : Étudier une distribution invariante d'une chaîne de Markov sur un graphe à deux sommets

Vidéo https://youtu.be/PS756B-M0Dw

On considère la chaîne de Markov sur le graphe ci-dessous :



Étudier la convergence de la chaîne de Markov.