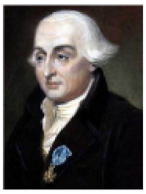
DÉRIVATION (Partie 1)



Le mot « dérivé » vient du latin « derivare » qui signifiait « détourner un cours d'eau ».
Le mot a été introduit par le mathématicien franco-italien *Joseph Louis Lagrange* (1736 ; 1813) pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de "provenir") d'une autre fonction.

I. Limite en zéro d'une fonction

Exemple :

1) Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\frac{(x+1)^2-1}{x}$.
L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	…	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque x se rapproche de 0.
On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 est égale à 2 et on note : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$.

II. Nombre dérivé

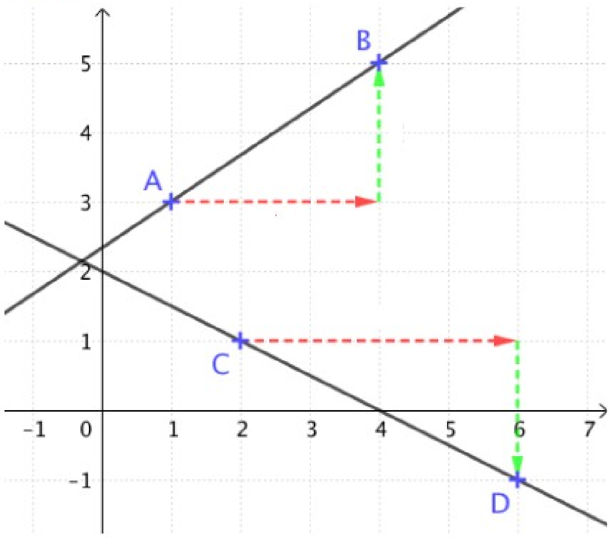
1) Rappel : Coefficient directeur d'une droite

Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à :

$$\frac{-}{-}=-$$

Le coefficient directeur de la droite (CD) est égal à :

$$\frac{-}{-}=\frac{-}{}=$$



Méthode : Calculer le nombre dérivé

▶ **Vidéo** https://youtu.be/UmT0Gov6yyE

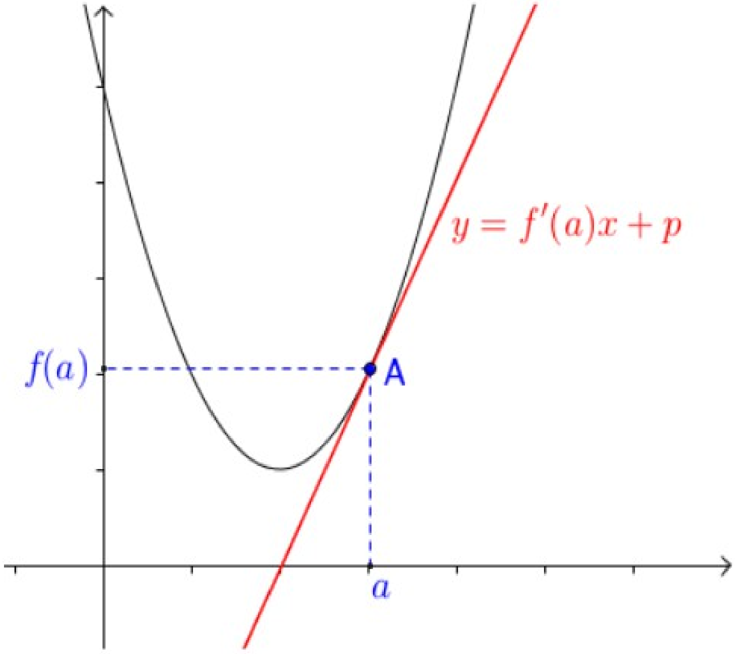
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+2x-3$.
Calculer le nombre dérivé de la fonction f en $x=2$.

Réponse :

Le nombre dérivé de f en a est :
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

III. Tangente à une courbe

A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative d'une fonction f.



Définition : La __________ à la courbe au point A d'abscisse a est la droite :
- passant par A,
- de coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$.

Méthode : Déterminer le coefficient directeur d'une tangente à une courbe

Vidéo https://youtu.be/0jhxK55jONs

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$ dont le nombre dérivé en 2 a été calculé plus haut.

1) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

2) a) Construire la tangente à la courbe de la fonction f en 2.

b) En s'aidant de la calculatrice graphique, reproduire la courbe de la fonction f.

3) Donner une équation de la tangente.

Corrigés :

DERIVATION (Partie 2)

I. Fonction dérivée

Définition :
La fonction qui à tout réel x associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f'.

Formules de dérivation de fonctions usuelles :

Fonction f	Dérivée f'
$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Formules d'opération sur les fonctions dérivées :

$(f+g)' = f' + g'$
$(kf)' = kf' \quad a \in \mathbb{R}$

Méthode : Calculer des fonctions dérivées

Vidéo https://youtu.be/uTk3T_GfwYo

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de la fonction f :
1) $f(x) = 3x$ 2) $f(x) = x^2 + 5$ 3) $f(x) = 5x^3$ 4) $f(x) = 3x^2 + 4x$

Corrigés :

II. Fonction dérivée d'une fonction polynôme

1) Fonction polynôme de degré 2

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$.
Pour déterminer la fonction dérivée f', on applique la technique suivante :

$$f(x) = 5x^{2} \quad -3\cancel{x} \quad \cancel{+2}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = 2 \times 5x \quad -3$$

Définition : Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On appelle **fonction dérivée** de f, notée f', la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2ax + b$.

Méthode : Déterminer la fonction dérivée d'une fonction polynôme du second degré

Vidéo https://youtu.be/5WDIrv_bEYE

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4x^2 - 6x + 1$ b) $g(x) = x^2 - 2x + 6$ c) $h(x) = -3x^2 + 2x + 8$
d) $k(x) = x^2 + x + 1$ e) $l(x) = 5x^2 + 5$ f) $m(x) = -x^2 + 7x$

Corrigés :

2) Fonction polynôme de degré 3

Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie par :
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$.
Pour déterminer la fonction dérivée f', on applique la technique suivante :

$$f(x) = 2x^{\cancel{3}\,2} - 3x^{\cancel{2}} + 5\cancel{x} \cancel{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = 3 \times 2x^2 - 2 \times 3x + 5$$

Définition : Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
On appelle **fonction dérivée** de f, notée f', la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Méthode : Déterminer la fonction dérivée d'une fonction polynôme du troisième degré

Vidéo https://youtu.be/1fOGueiO_zk

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$
b) $g(x) = 5x^3 + 2x^2 + 2x - 7$
c) $h(x) = -2x^3 - 3x^2 - 7x + 8$
d) $k(x) = -x^3 + x^2 + 1$
e) $l(x) = 4x^3 + 1$
f) $m(x) = -x^3 + 7x$

Corrigés :

III. Variations d'une fonction polynôme

Théorème :
- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante.

Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré

Vidéo https://youtu.be/EXTobPZzORo
Vidéo https://youtu.be/zxyKLqnlMlk

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$.
1) Calculer la fonction dérivée de f.
2) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
3) Dresser le tableau de variations de f.

Corrigés :

Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme du troisième degré

Vidéo https://youtu.be/Ktc-PThiP6I

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.

1) a) Calculer la fonction dérivée de f.
   b) Démontrer que $f'(x) = 3(x + 4)(x - 1)$.
2) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
3) Dresser le tableau de variations de f.
4) À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement la fonction f.