

Calcul des propositions et des prédicats

Calcul propositionnel

1. ++ Beaucoup d'implications

1. Établir la table de vérité de chacune des propositions suivantes :

a) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$; b) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.

2. Ces deux propositions sont-elles équivalentes?

CORRIGÉ P. 172

2. + Beaucoup d'équivalences

Mêmes questions qu'à l'exercice 1 en remplaçant \Rightarrow par \Leftrightarrow .

CORRIGÉ P. 172

3. +++ Avec seulement \neg et \vee

1. Déterminer une proposition équivalente à $P \wedge Q$ qui ne comporte que les connecteurs \neg et \vee .

2. Écrire une proposition équivalente à $P \Rightarrow Q$ qui ne comporte que les connecteurs \neg et \vee .

3. En déduire une proposition équivalente à $P \Leftrightarrow Q$ qui ne comporte que les connecteurs \neg et \vee .

CORRIGÉ P. 172

4. +++ Négation d'une implication

1. La négation de l'implication $P \Rightarrow Q$ est-elle équivalente à l'une des implications suivantes :

$P \Rightarrow \neg Q$, $\neg P \Rightarrow Q$, $\neg P \Rightarrow \neg Q$, $Q \Rightarrow P$,

$Q \Rightarrow \neg P$, $\neg Q \Rightarrow P$, $\neg Q \Rightarrow \neg P$?

2. Écrire une proposition équivalente à $P \Rightarrow Q$ ne comportant que les connecteurs \neg et \vee .

3. En déduire une proposition équivalente à $\neg(P \Rightarrow Q)$ ne comportant que les connecteurs \neg et \wedge .

4. En déduire une proposition équivalente à la négation de $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ où p et q sont deux prédicats.

5. Appliquer ce qui précède à la valeur de vérité de la proposition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 > 1 \Rightarrow x > 1.$$

5. + Simplifications

1. a) Établir la table de vérité de la proposition suivante :

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \vee Q).$$

b) À quelle proposition plus simple cette proposition est-elle équivalente ?

2. Mêmes questions avec

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \wedge Q).$$

6. ++ Le connecteur « nand »

La barre de Sheffer est le connecteur binaire qui, à toutes propositions P, Q associe la proposition, notée $P | Q$, équivalente à $\neg(P \wedge Q)$.

Ce connecteur est aussi appelé « nand », contraction de « no and », c'est-à-dire « non et ».

1. Établir la table de vérité de $P | Q$.

2. Démontrer que pour toute proposition P , $\neg P \Leftrightarrow P | P$.

3. Déduire de la définition de $P | Q$ et du résultat du 2 une proposition équivalente à $P \wedge Q$ dans laquelle seul le connecteur $|$ apparaît.

4. Démontrer à l'aide d'une loi de Morgan que, pour toutes propositions P, Q , $P \vee Q \Leftrightarrow ((P|P)|(Q|Q))$.

Ainsi tous les connecteurs binaires peuvent être obtenus à l'aide du seul connecteur « nand ».

7. +++ Le connecteur « nor »

Le connecteur de Peirce est le connecteur binaire qui, à toutes propositions P, Q associe la proposition, notée $P \downarrow Q$, équivalente à $\neg(P \vee Q)$.

Ce connecteur est aussi appelé « nor », contraction de « no or », c'est-à-dire « non ou ».

1. P étant une proposition quelconque, déterminer une proposition équivalente à $\neg P$ dans laquelle seul le connecteur \downarrow apparaît.

2. P, Q étant des propositions quelconques, déterminer une proposition équivalente à $P \vee Q$ dans laquelle seul le connecteur \downarrow apparaît.

3. Même question en remplaçant \vee par \wedge .

Ainsi tous les connecteurs binaires peuvent être obtenus à l'aide du seul connecteur « nor ».

8. + Recherche d'associativité

Le connecteur « nand » est défini à l'exercice 6.

1. P, Q, R étant des propositions quelconques, établir la table de vérité de chacune des propositions suivantes :

a) $(P|Q)|R$; b) $P|(Q|R)$.

2. Ces deux propositions sont-elles équivalentes ?

9. + Recherche d'associativité (suite)

Même exercice que le précédent en remplaçant le connecteur « nand » par le connecteur « nor » défini à l'exercice 7.

10. + Recherche de distributivité

Les connecteurs « nand » et « nor » sont définis aux exercices 6 et 7.

1. P, Q, R étant des propositions quelconques, établir la table de vérité de chacune des propositions suivantes :

a) $P \downarrow (Q|R)$;

b) $(P \downarrow Q)|(P \downarrow R)$.

Ces deux propositions sont-elles équivalentes ?

2. Même question en permutant $|$ et \downarrow .

11. ++ Recherche d'équivalence

1. P, Q, R étant des propositions quelconques, établir la table de vérité de chacune des propositions suivantes :

a) $P \wedge Q \Rightarrow R$;

b) $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$;

c) $(P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)$.

2. En déduire une équivalence entre deux des trois propositions ci-dessus.

