Série 2	Graphes	BTS SIO 2

Exercice 1 :

Un développeur de jeu vidéo doit travailler sur les déplacements possibles d'un joueur à l'intérieur d'un donjon, composé de six salles notées A, B, C, D, E et F. L'entrée et la sortie du donjon ne peuvent se faire que par la salle F.

À l'intérieur du donjon, les déplacements autorisés sont schématisés par des flèches sur le plan de la fig. 6.15. Par exemple, la flèche entre la salle A et la salle B montre qu'on peut aller de B vers A, mais pas de A vers B.

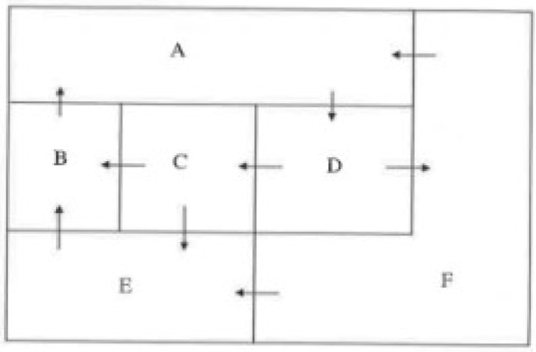

Figure 6.15

Partie A

a) Dessiner un graphe modélisant les salles et les déplacements.

b) Faire un tableau donnant les successeurs et les prédécesseurs de chaque sommet.

c) Le graphe peut-il être ordonné par niveaux ?

d) Écrire la matrice d'adjacence du graphe.

Partie B

a) Calculer M^3. Expliquer la signification des nombres de la dernière ligne de cette matrice.

b) Le joueur se trouvant dans la salle F, déterminer les salles dans lesquelles il peut se retrouver en quatre déplacements. Écrire tous les déplacements correspondants.

c) Est-il possible, à partir de F et en cinq déplacements, de visiter chaque salle ?

d) Le joueur pourra-t-il de partir de F et y revenir en exactement six déplacements ? Si oui, ces trajets permettent-ils de visiter chaque salle ?

Partie C

Chaque entrée dans une salle coûte au joueur un certain nombre de points. Les entrées dans les salles A, B, C, D, E et F coûtent respectivement 25, 20, 40, 30, 25 et 20 points. Le développeur souhaite que le joueur ne puisse pas faire plus de huit déplacements à l'intérieur du donjon, à partir de son entrée en F et son retour en F.

a) Dessiner le graphe valué modélisant la consommation en points de chaque déplacement.

b) Combien de trajets de huit déplacements le joueur peut-il faire à l'intérieur du donjon ?

c) En effectuant ces huit déplacements, combien de points le joueur consommera-t-il au maximum ?

Exercice 2 :
Pour chacun des graphes donner la liste des successeurs et prédécesseurs :

Exercice 3:

Pour chacun des graphes de l'exercice **6.1**, écrire la matrice d'adjacence (les sommets seront pris dans l'ordre alphabétique).

Exercice 4:

Compléter chaque tableau en ajoutant les prédécesseurs, puis construire le graphe associé.

Tableau 6.11

Sommet	A	B	C	D
Successeurs	B, C	B	B, D	C
Prédécesseurs				

Tableau 6.12

Sommet	A	B	C	D
Successeurs	C	A, C	D	B
Prédécesseurs				

Exercice 5:

Écrire la matrice d'adjacence de chacun des graphes de l'exercice **6.3**.

Exercice 6:

Compléter chaque tableau en ajoutant les successeurs.

Tableau 6.13

Sommet	A	B	C	D	E
Successeurs					
Prédécesseurs	B, E	A	B,C,D,E	A	B

Tableau 6.14

Sommet	A	B	C	D	E
Successeurs					
Prédécesseurs	B	C, D, E	A, E	C	D

Exercice 7:

M_1 et M_2 sont les matrices d'adjacence de deux graphes définis respectivement sur les ensembles $S_1 = \{A; B; C; D\}$ et $S_2 = \{A; B; C; D; E\}$. Faire le tableau des successeurs et des prédécesseurs de chaque graphe.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8:

a) Écrire la matrice d'adjacence M du graphe de la fig. 6.19.

b) Calculer M^2 Expliquer la signification des quatre nombres de la deuxième ligne de la matrice M^2 ?

c) Combien y a-t-il de chemins de longueur 2 dans le graphe ? Les citer.

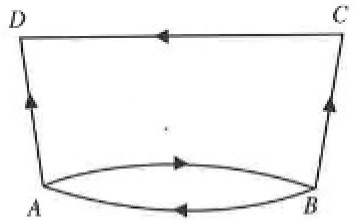

Figure 6.19

Exercice 9:

a) Écrire la matrice d'adjacence M du graphe de la fig. 6.20.

b) Calculer M^3 Expliquer pourquoi on peut affirmer qu'il existe deux chemins de longueur 3 reliant B à A. Citer ces deux chemins.

c) Le graphe possède-t-il des circuits de longueur 3 ?

d) Calculer M^4. Entre quels sommets n'existe-t-il pas de chemin de longueur 4 ?

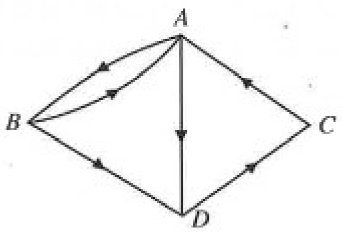

Figure 6.20

Exercice 10:

a) Écrire la matrice d'adjacence M du graphe de la fig. 6.21.

b) Calculer M^4.

c) Combien y a-t-il de chemins de longueur 4 qui partent de A ? Citer ces chemins. Parmi eux, y a-t-il des chemins hamiltoniens ?

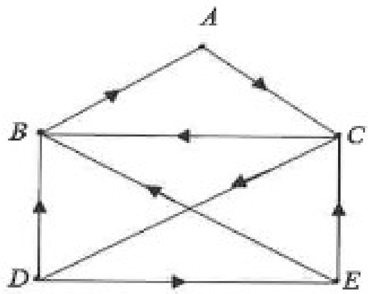

Figure 6.21

Exercice 11:

a) Écrire la matrice d'adjacence M du graphe de la fig. 6.22.

b) Quels arcs doit-on rajouter pour faire la fermeture transitive du graphe ?

c) Calculer les matrices booléennes $M^{[2]}$ et $M^{[3]}$. En déduire la matrice $\hat{M}$ de la fermeture transitive.

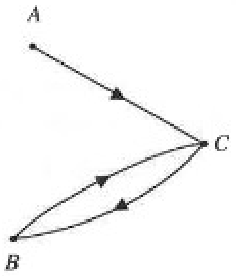

Figure 6.22

Exercice 12 :

a) Écrire la matrice d'adjacence M du graphe de la fig. 6.23.

b) Quels arcs doit-on rajouter pour faire la fermeture transitive du graphe ?

c) Calculer la matrice $\hat{M}$ de la fermeture transitive.

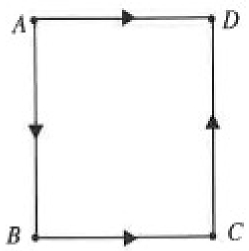

Figure 6.23

Exercice 13:

Calculer la matrice $\hat{M}$ de la fermeture transitive du graphe de la fig. 6.24. Quels arcs doit-on ajouter pour la réaliser ?

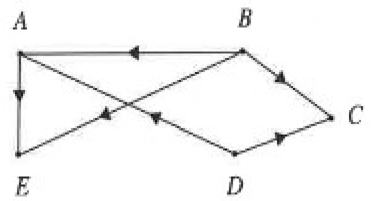

Figure 6.24

Exercice 14:

Un graphe est défini par le tableau 6.15. Déterminer le niveau de chaque sommet et représenter le graphe en tenant compte des niveaux.

Tableau 6.15

Sommets	A	B	C	D	E	F	G
Successeurs	C, E	---	F, G	---	B, F	D	D

Exercice 15:

Un graphe est défini par le tableau 6.16. Déterminer le niveau de chaque sommet et représenter le graphe en tenant compte des niveaux.

Tableau 6.16

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H
Successeurs	E, G	---	A, H	F	---	G	---	B, D

Exercice 16:

Un graphe est défini par le tableau 6.17. Déterminer les prédécesseurs de chaque sommet. Pourquoi peut-on affirmer que le graphe est une arborescence ? Dessiner cette arborescence.

Tableau 6.17

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Successeurs	B,L	D,K	---	---	A,J	C,G,I	---	---	---	F	---	H

Exercice 17:

Sept villes notées A, B, C, D, E, F et G constituent un réseau. Sur le graphe valué suivant (fig. 6.25) figurent les liaisons et leurs durées en heures.

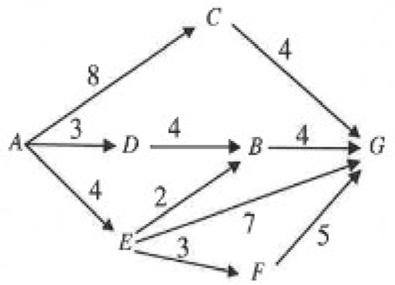

Figure 6.25

a) On va rechercher le chemin minimal pour aller de A à G. Pour cela, on va se servir de la propriété « *tout chemin optimal est composé de chemins eux-mêmes optimaux* ». À chaque sommet, on va attribuer une marque en appliquant l'algorithme suivant :

- Les sommets de niveau 0 reçoivent la marque 0.
- Les sommets de niveau 1 reçoivent une marque égale à la valeur minimale des chemins venant du niveau 0.
- Les sommets des autres niveaux reçoivent une marque égale à la valeur minimale de tous les chemins provenant des niveaux précédents.

Appliquer cet algorithme sur le graphe et en déduire la durée minimale du trajet pour aller de A à G.

b) On donne maintenant les distances entre les villes, en kilomètres : $AC = 500$, $AD = 200$, $AE = 210$, $BG = 250$, $CG = 200$, $DB = 250$, $EB = 180$, $EF = 200$, $EG = 450$, $FG = 210$. Appliquer l'algorithme sur le graphe et en déduire la longueur minimale du trajet pour aller de A à G.

Exercice 18:

Sur le graphe de la fig. 6.26, déterminer le chemin de longueur minimale reliant A à I, puis le chemin de longueur maximale reliant A à I.

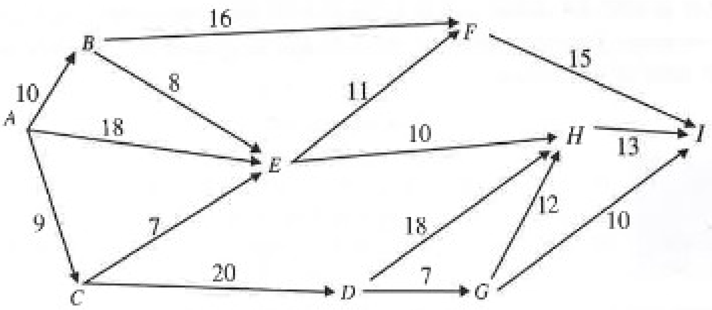

Figure 6.26

Exercice 19:

La mise en service d'un nouvel équipement routier demande la réalisation d'un certain nombre de tâches. Le tableau 6.18 représente ces différentes tâches avec leurs relations d'antériorité.

Tableau 6.18

Tâches	A	B	C	D	E	F	G
Durées (en jours)	6	3	6	2	4	3	1
Tâches antérieures	aucune	aucune	aucune	B	B	A, D	C, E, F

a) Déterminer le niveau de chacune des tâches.

b) Construire le graphe d'ordonnancement du projet et calculer les dates au plus tôt et au plus tard de chaque tâche.

c) Déterminer le chemin critique. Quelle est la durée minimale de réalisation du projet ?

d) Calculer la marge totale de la tâche E. Quelle est sa signification ?

e) Calculer la marge libre de la tâche C. Quelle est sa signification ?

Exercice 20:

La réalisation d'un projet nécessite plusieurs tâches successives dont les durées en jours sont données dans le tableau suivant, ainsi que les tâches devant être réalisées antérieurement.

Tableau 6.19

Tâches	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*
Durées	4	2	2	1	2	5	3	3	3	4
Tâches antérieures	aucune	aucune	*A*	*A*	*A, B*	*C*	*D, E*	*E, G*	*H*	*F,I*

a) Déterminer le niveau de chacune des tâches.

b) Construire le graphe d'ordonnancement du projet et calculer les dates au plus tôt et au plus tard de chaque tâche.

c) Déterminer le chemin critique. Quelle est la durée minimale de réalisation du projet ?

d) En réalité, la tâche C a nécessité une durée de 5 jours. Est-ce que cela a eu une incidence sur la durée de réalisation du projet ?