Exercices d'applications :

Exercice résolu A — Résoudre une équation à l'aide d'un graphique

1 À l'aide de la calculatrice, réaliser un tableau de valeurs pour la fonction exponentielle de base 10 entre -2 et 0, de pas 0,1. On arrondira les résultats au centième le plus proche.

2 Tracer alors, en vert, la représentation graphique de l'exponentielle de base 10 sur l'intervalle $[-2\ ;\ 0]$ avec pour échelle 10 centimètres pour une unité graphique.

3 Sur le même graphique, tracer, en rouge, la droite d'équation $y = 0{,}45$.

4 Lire une valeur approchée de l'antécédent de 0,45 par l'exponentielle de base 10.

5 a. En posant $a = -0{,}9$ et $b = -0{,}2$, calculer $a + b$ et $a - b$.

b. Donner des valeurs approchées de 10^a, 10^b, 10^{a+b} et 10^{a-b}.

c. Vérifier alors la cohérence des formules de la propriété (5) du cours.

Exercice résolu B — Comparer des nombres

1 Classer les nombres 10 000, 1, 1 000 et 0,01 par ordre croissant.

2 Sans les calculer, classer alors les nombres log(10 000), log(1), log(1 000) et log(0,01) par ordre croissant. Justifier.

3 Prédire également les signes des quatre nombres évoqués à la question précédente.

4 Écrire 10 000, 1, 1 000 et 0,01 sous la forme de puissances de 10.

5 **a.** En déduire les valeurs des nombres log(10 000), log(1), log(1000) et log(0,01)

b. Puis vérifier la pertinence de vos résultats aux questions 2 et 3.

Exercice résolu C

Utiliser les propriétés algébriques du logarithme décimal

1. En constatant que $50 = 2 \times 5^2$, écrire $\log(50)$ en fonction de $\log(2)$ et de $\log(5)$.
2. Écrire la somme $\log(2) + \log(5)$ sous la forme d'un entier naturel.
3. En déduire une autre écriture de $\log(50)$ où $\log(2)$ n'intervient plus.
4. Écrire également $\log(48)$ en fonction de $\log(2)$ et de $\log(3)$.
5. En déduire une expression de $\log\left(\frac{1}{48}\right)$.
6. Déterminer finalement $\log\left(\frac{50}{48}\right)$ en fonction de $\log(2)$, de $\log(3)$ et de $\log(5)$.

Indication : On peut d'abord simplifier la fraction mise en jeu.

Exercice résolu D — Utiliser le logarithme décimal dans un placement financier

Un client d'une banque souhaite placer 1 000 euros sur un livret d'épargne. Le taux qu'on lui propose est de 5 % par an. Quelques années plus tard, le client a besoin d'investir dans un projet personnel et reprend son capital et les intérêts acquis. Le banquier lui reverse alors 1 407,10 euros.

1. Déterminer (en arrondissant au centime) le capital du client après un an et après deux ans de placement.
2. Quelle formule permet de calculer le capital du client après n années ?
3. Déterminer pendant combien d'années se sont écoulées entre le début et la fin du placement.
4. Si le client avait voulu placer la même somme 5 ans, et que le banquier voulait être sûr de verser moins d'intérêts globalement à son client, quel taux annuel maximal pouvait-il se permettre de proposer à son client ?

On répondra au centième de pourcent près.

Fonction logarithme décimal

Définitions

Sur $]0\,;+\infty[$, on définit le logarithme décimal (noté log) comme étant la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base 10.

Autrement dit, **si $b>0$, $\log(b)$ est l'unique réel x tel que $10^x = b$.**

On a par conséquent toujours $10^{\log(b)} = b$, relation qu'on notera (*).

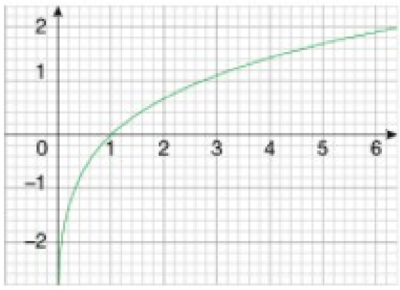
Signes et variation de la fonction log

(1) Sur $]0\,;+\infty[$, la fonction logarithme décimal est strictement croissante.

(2) La fonction logarithme décimal est strictement négative sur $]0\,;1[$.

(3) La fonction logarithme décimal est strictement positive sur $]1\,;+\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
Variation de la fonction log	$\nearrow$	0	$\nearrow$
Signe de la fonction log	$-$	0	$+$



Propriétés algébriques de la fonction log

On considère a et b deux réels strictement positifs :

(1) $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$

(2) $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

(3) $\log(a^2) = 2 \times \log(a)$

(4) $\log(a^3) = 3 \times \log(a)$

(5) $\log(a^n) = n \times \log(a)$ où n est un entier naturel

(6) $\log(a^x) = x \times \log(a)$ où x est un réel strictement positif

Résolution d'équations à l'aide de la fonction log

Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a \neq 1$.

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \frac{\log(b)}{\log(a)}$$

$$a^x < b \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{\log(b)}{\log(a)} \text{ si } a < 1 \\ x < \dfrac{\log(b)}{\log(a)} \text{ si } a > 1 \end{cases}$$

Soient $a \neq 0$ et $b > 0$

$$x^a = b \Leftrightarrow x = 10^{\frac{\log(b)}{a}}$$

$$x^a < b \Leftrightarrow \begin{cases} x > 10^{\frac{\log(b)}{a}} \text{ si } a < 0 \\ x < 10^{\frac{\log(b)}{a}} \text{ si } a > 0 \end{cases}$$