Exercices	Série TD : algèbre de Boole	

TD 1 :

La connexion à un site Internet nécessite la saisie d'un mot de passe comportant de 8 à 12 caractères. Ces caractères peuvent être des lettres majuscules de l'alphabet français, ou des chiffres, ou des caractères spéciaux (tels que &, *, /, § etc).

Un mot de passe est valide si l'une au moins des trois conditions suivantes est réalisée :

- Il comporte au moins trois chiffres et trois caractères spéciaux.
- Il comporte au moins cinq lettres.
- Il comporte moins de trois chiffres mais au moins cinq lettres et trois caractères spéciaux.

Partie A – Reconnaître si un mot de passe est valide

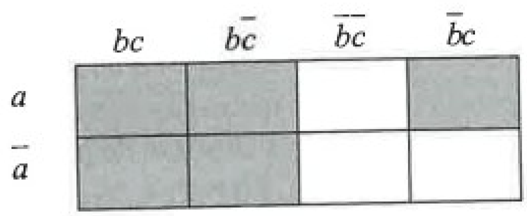
a) Parmi les mots de passe suivants, quels sont ceux qui sont valides ?

H32EXZ&K5=   LUC230598**   123(M*K<4

b) Alice veut créer un mot de passe avec quatre lettres, quatre chiffres et quatre caractères spéciaux. Ce mot de passe sera-t-il accepté ? Et un mot de passe de huit lettres ?

b)

Tableau 4.21



Le tableau 4.21 montre que l'on peut écrire $A = b + a\bar{b}c$, ou plus simplement, pour minimiser le nombre de symboles, $A = b + ac$.

c) $A = ac + b + \bar{a}bc$

$= c(a + \bar{a}b) + b$ (1)

$= c(a + b) + b$ (2)

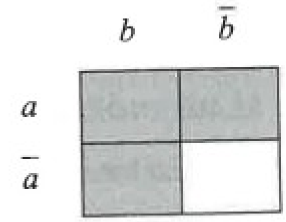
$= ac + bc + b$ (3)

$= ac + b(1 + c)$

$= ac + b$ (4)

(1) en factorisant par c ; (2) en utilisant un tableau de Karnaugh à deux variables (voir tableau 4.22) ; (3) par distributivité de la multiplication ; (4) car $1+c=1$.

Tableau 4.22 – Tableau montrant que $a+\bar{a}b = a+b$.



d) Un mot de passe est valide lorsqu'il a au moins cinq lettres ou qu'il a au moins trois chiffres et au moins trois caractères spéciaux.

Partie C – Les mots de passe non valides

a) Pour trouver l'expression de $\overline{A}$ grâce au tableau, il faut considérer les cases restées blanches : la troisième colonne correspond à $\bar{b}\bar{c}$ et les deux dernières cases de la deuxième ligne correspondent à $\bar{a}\bar{b}$ donc $\overline{A} = \bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{c}$.

Exercices :

.1 Écrire sans implication la proposition « $x>1 \Rightarrow y = 3$ ».

.2 On considère la proposition P : « $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ n = 2^p$ ».
Énoncer la négation de P puis donner, en justifiant, la valeur de vérité de P.

.3 L'affirmation « la présente affirmation est fausse » est-elle une proposition ?

.4 On note P et Q les affirmations suivantes :

- P = « Paul aime le foot »
- Q = « Paul aime les maths »

Représenter les affirmations suivantes sous forme symbolique en utilisant P, Q et des connecteurs logiques.

- A = « Paul aime le foot mais pas les maths »
- B = « Paul n'aime ni le foot, ni les maths »
- C = « Paul aime le foot ou il aime les maths et pas le foot »
- D = « Paul aime les maths et le foot ou il aime les maths mais pas le foot »

5 Quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes :

- A = « $\pi = 5$ et $2 + 3 = 5$ »
- B = « $\pi = 5$ ou $2 + 3 = 5$ »
- C = « $\pi \approx 3{,}14 \Rightarrow 5 + 6 = 11$ »
- D = « $\pi = 5 \Rightarrow 2 + 3 = 5$ »
- E = « $4 = 5 \Rightarrow$ A est vraie » (A est la proposition citée plus haut)
- F = « $5 + 5 = 10 \Leftrightarrow \pi = 11$ »

6 Quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes :

A = « $11 > 0$ et $3 < 2$ »
B = « $11 > 0$ ou $3 < 2$ »
C = « $3 > 6$ ou $6 > 20$ »
D = « $3 < 2 \Rightarrow 5 = 5$ »
E = « $4 \neq 1 \Rightarrow 4 = 1$ »
F = « $4 < 5 \Leftrightarrow 10 = 1 + 9$ »

.7 Montrer, à l'aide d'une table de vérité, que les propositions suivantes sont des tautologies, c'est-à-dire qu'elles sont vraies quelles que soient les valeurs de vérité des propositions P et Q.

a) non(P et Q) $\Leftrightarrow$ (nonP ou nonQ) b) (P $\Rightarrow$ Q) $\Leftrightarrow$ (non P ou Q)

.8 Montrer, à l'aide d'une table de vérité, que les propositions suivantes sont des tautologies, c'est-à-dire qu'elles sont vraies qu'elles que soient les valeurs de vérité des propositions qui les composent.

a) non(P ou Q) $\Leftrightarrow$ (nonP et non Q)

b) (P et (Q ou R)) $\Leftrightarrow$ ((P et Q) ou (P et R))

.9 Vrai ou faux ? (Justifier)

a) $\exists\, x \in \mathbb{R}, x^2 = x$

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}, x/3 = (1/3)x$

c) $\exists\, x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

d) $\forall\, x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 < 101$

.10 Énoncer deux propositions de valeur de vérités différentes dans lesquelles apparaît le prédicat « $x = 2x + 1$ ».

.11 Dans chacun des cas suivants, énoncer deux propositions dans lesquelles apparaît le prédicat donné : l'une vraie, l'autre fausse.

a) $x^2 \geq x$ b) $y = 2x$

.12 Vrai ou faux ? (Justifier)

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}, y = x - 1$ b) $\exists\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, y = x - 1$

.13 Vrai ou faux ? (Justifier)

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}, x + nx = (n+1)x$

b) $\exists\, x \in \mathbb{R}, \exists\, n \in \mathbb{N}, x + nx = (n+1)x$

c) $\exists\, n \in \mathbb{N}, \exists\, p \in \mathbb{N}, p - n$ est divisible par 2

d) $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, p \in \mathbb{N}, p - n$ est divisible par 2

.14 Pour chaque proposition, donner sa valeur de vérité, énoncer sa négation puis donner la valeur de vérité de celle-ci.

a) $\exists\, x \in \mathbb{R}, 3x = 2$

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}, x = x + 1$

c) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, x \leq y$

.15 Pour chaque proposition, donner sa valeur de vérité, énoncer sa négation puis donner la valeur de vérité de celle-ci.

a) $\exists\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, x^2 = y$

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}, x^2 = y$

.16 Pour les valeurs de a, b et c données, calculer les expressions A, B et C :

$$A=\overline{a}+b+\overline{c},\qquad B=a\overline{b}+c,\qquad C=(a+b)\overline{c}$$

a) $a=0, b=1, c=1$
b) $a=1, b=1, c=1$
c) $a=1, b=1, c=0$

.17 Démontrer à l'aide d'une table de vérité les formules suivantes :

a) $a+ab=a$ b) $a(a+b)=a$

.18 Démontrer à l'aide d'une table de vérité les formules suivantes :

a) $a+\overline{a}b=a+b$ b) $(a+b)(a+\overline{b})=a$

.19 Démontrer à l'aide d'une table de vérité les formules suivantes :

a) $a+b+\overline{a}\cdot\overline{b}=1$ b) $(a+b)\overline{a}\cdot\overline{b}=0$

.20 Démontrer à l'aide d'une table de vérité les formules suivantes :

$a(b+c)=ab+ac$ (distributivité de la multiplication)

$a+bc=(a+b)(a+c)$ (distributivité de l'addition)

.21 Démontrer par calculs les formules suivantes :

a) $a+ab=a$ b) $a(a+b)=a$

.22 Démontrer par calculs les formules suivantes :

a) $a+\overline{a}b=a+b$ b) $(a+b)(a+\overline{b})=a$

.23 Démontrer par calculs les formules suivantes :

a) $a+b+\overline{a}\cdot\overline{b}=1$ b) $(a+b)\overline{a}\cdot\overline{b}=0$

.24 Démontrer à l'aide d'un tableau de Karnaugh les formules suivantes :

a) $a+\overline{a}b=a+b$ b) $a+b+\overline{a}\cdot\overline{b}=1$

.24 Démontrer à l'aide d'un tableau de Karnaugh les formules suivantes :

a) $a+\overline{a}b=a+b$ b) $a+b+\overline{a}\cdot\overline{b}=1$

.25 a) Représenter par un tableau de Karnaugh les expressions :
$A=ab+\overline{c}$ et $B=\overline{a}+bc$

b) Utiliser le tableau pour déterminer les expressions de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

.26 a) Représenter par un tableau de Karnaugh les expressions :

$$A=a\overline{c}+\overline{b}c+abc\qquad \text{et}\qquad B=\overline{a}b+\overline{b}c+a\overline{c}$$

b) Utiliser le tableau pour déterminer les expressions de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

.27 Soit $A = ab + \overline{c}$ et $B = \overline{a} + bc$. Montrer par calculs que $\overline{A} = \overline{a}c + \overline{b}c$ et que $\overline{B} = a\overline{c} + a\overline{b}$.

.28 Par calculs, démontrer la formule $(a+b)(a+c) = a + bc$.

.29 On considère la loi * définie par la table de vérité du tableau :

Tableau 4.23

a	b	$a * b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

a) En logique, quel est l'équivalent de cette loi ?

b) À l'aide d'une table de vérité, montrer que $a * b = \overline{a} \cdot b + a \cdot \overline{b}$

c) Démontrer par calculs que $a * b = (a+b) \cdot (\overline{a} + \overline{b})$.

.30 Soit $A = \overline{a} \cdot \overline{b} + a\overline{b} + b$. Montrer qua A=1 de deux façons : table de vérité et calculs.

.31 Soit $A = ab + abc + a\overline{b}$. Montrer qua A=a de deux façons : tableau de Karnaugh et calculs.

.32 Soit $A = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + a\overline{b}c + \overline{a} \cdot \overline{b} + a\overline{b} \cdot \overline{c}$. Simplifier A avec un diagramme de Karnaugh, puis vérifier par des calculs.

.33 On définit une loi $*$ par $a * b = \overline{a} \cdot b + a \cdot \overline{b}$

a) Montrer que $a * a = 0$

b) Calculer $a * \overline{a}$

c) Calculer $a * 1$

d) Montrer que 0 est élément neutre pour la loi $*$

.34 On désigne par $\downarrow$ la loi définie par $a \downarrow b = \overline{a + b}$ où a et b sont des variables booléennes.

a) Que valent $a \downarrow 0$ et $a \downarrow 1$?

b) Soit $A = (a \downarrow b) + (a \downarrow a)$. Simplifier A par le calcul.

c) Soit a, b et c trois variables booléennes. A-t-on $(a \downarrow b) \downarrow c = a \downarrow (b \downarrow c)$?

.35 Dans un grand magasin, le service clientèle a organisé une classification des clients en trois catégories :

- Si le client achète un article, il est classé en catégorie A et $a = 1$, sinon $a = 0$.
- Si le client échange ou rend un article, il est classé en catégorie E et $e = 1$ sinon $e = 0$.
- Si le client demande des renseignements, il est classé en catégorie R et $r = 1$ sinon $r = 0$.

Soit $F = a \cdot \overline{e} \cdot r + a \cdot \overline{e} \cdot \overline{r}$

a) Faire le diagramme de Karnaugh de F.

b) En déduire une forme simplifiée de F.

c) Retrouver la forme simplifiée de F par calcul.

d) Quel type de client est un client de type $\overline{F}$? Est-ce un client peu intéressant, assez intéressant ou très intéressant pour le magasin ? Donner l'écriture la plus simple de $\overline{F}$.

.36 Une société désire recruter en interne des collaborateurs pour sa filiale en Asie. Pour chaque employé, on définit les variables booléennes suivantes :

$a = 1$ s'il a plus de cinq ans d'ancienneté dans l'entreprise.

$b = 1$ s'il possède un BTS SIO.

$c = 1$ s'il parle couramment l'anglais.

La direction des ressources humaines décide que pourront postuler les employés :

- qui satisfont aux trois conditions ;
- ou qui ont moins de cinq ans d'expérience mais qui maîtrisent l'anglais ;
- ou qui ne maîtrisent pas l'anglais mais ont un BTS SIO.

a) Écrire une expression booléenne E traduisant les critères de sélection de la direction.

b) Représenter l'expression E par un tableau de Karnaugh.

c) À l'aide du tableau, donner une expression simplifiée de E.

d) Retrouver le résultat par calcul.

e) Déduire des questions 3 ou 4 une version simplifiée des critères de la direction.

.37 On considère l'expression $E = \overline{a}\,\overline{c} + b\overline{c} + a\overline{b} + \overline{a}\,\overline{b}\,c$.

a) Simplifier l'écriture de $\overline{E}$ à l'aide d'un diagramme de Karnaugh et en déduire que $E = \overline{b} + \overline{c}$. Retrouver par calcul la forme simplifiée de E.

b) Dans un organisme qui aide des personnes au chômage à retrouver un emploi, on considère pour ces personnes les trois variables booléennes a, b et c définies ainsi :

- $a = 1$ si la personne a 45 ans ou plus, sinon $a = 0$.
- $b = 1$ si la personne est au chômage depuis un an ou plus, sinon $b = 0$.
- $c = 1$ si la personne a déjà suivi une qualification l'année précédente, sinon $c = 0$.

Une formation sera mise en place pour les personnes vérifiant au moins un des critères suivants :

- Avoir 45 ans ou plus et être au chômage depuis moins d'un an.
- Avoir moins de 45 ans et ne pas avoir suivi de formation l'année précédente.

.38 Une entreprise décide de choisir de nouveaux chefs de service parmi ses employés en se servant des variables booléennes suivantes :

- $a = 1$ si et seulement si l'employé a plus de 10 ans d'ancienneté dans l'entreprise.
- $b = 1$ si et seulement si l'employé arrive souvent en retard.
- $c = 1$ si et seulement si l'employé a des relations difficiles avec ses collègues.

L'entreprise fait une première sélection parmi ses employés en considérant les critères suivants : « l'employé est ponctuel et s'entend bien avec ses collègues » ou « l'employé est dans l'entreprise depuis au moins 10 ans ».

a) Donner l'expression booléenne E correspondant à un employé qui respecte les conditions pour devenir chef de service.

b) Donner l'expression de $\overline{E}$ à l'aide du tableau de Karnaugh. Retrouver le résultat par calculs.

.39 Le gérant d'un magasin de vente de matériel d'occasion décide de réaliser une enquête sur les critères de choix des clients concernant l'achat d'ordinateurs.

Il examine trois critères, associés à trois variables booléennes a, b et c.

- La variable a concerne l'ancienneté. $a = 0$ si l'ordinateur a moins d'un an, $a = 1$ s'il a plus d'un an.
- La variable b concerne l'état. $b = 0$ si l'ordinateur est un peu abimé, $b = 1$ s'il est en bon état.
- La variable c concerne la fiabilité. $c = 0$ si la marque est réputée peu fiable, $c = 1$ sinon.

Après dépouillement, il apparaît que les clients achètent un ordinateur si :

- il a moins d'un an et que sa marque est réputée fiable ;
- ou s'il a plus d'un an mais qu'il est en bon état ;
- ou si sa marque est réputée peu fiable mais qu'il a moins d'un an.

a) Traduire par une variable booléenne E l'ensemble des critères d'achat.

b) Faire la table de Karnaugh de E et donner une expression simplifiée de E. Traduire par une phrase cette expression simplifiée.

c) Montrer par calculs, que $E = \overline{a} + b$. En déduire une expression de $\overline{E}$ et traduire cette expression par une phrase.

Exercices sup :

Exercice 7

Démontrer les relations suivantes :

1. $AB + ACD + \overline{B}D = AB + \overline{B}D$
2. $(\overline{A} + B)(A + C)(B + C) = (\overline{A} + B)(A + C)$
3. $AB + \overline{B}C = (A + \overline{B})(B + C)$
4. $\overline{A\overline{B} + \overline{A}B} = AB + \overline{A}\,\overline{B}$
5. $\overline{(A + B)(\overline{A} + C)} = (A + \overline{B})(\overline{A} + \overline{C})$

Proposition de solution :

Solution 1 : Deux fonctions logiques sont identiques si et seulement si leurs tables de vérité ou leurs formes canoniques sont identiques. Une solution consiste donc à établir la table de vérité ou l'une des représentations canoniques de la fonction définie par chaque expression, et de les comparer.

Solution 2 : Les identités peuvent également être démontrées par des manipulations algébriques. A titre d'exemple :

1. $$AB + ACD + \overline{B}D = AB + ACD\underbrace{(B + \overline{B})}_{=1} + \overline{B}D = AB + ABCD + A\overline{B}CD + \overline{B}D$$
$$= AB\underbrace{(1 + CD)}_{=1} + \overline{B}D\underbrace{(1 + AC)}_{=1} = AB + \overline{B}D$$

2. $$(\overline{A} + B)(A + C)(B + C) = (\overline{A} + B)(A + C)(B + C + \underbrace{\overline{A}A}_{=0}) = (\overline{A} + B)(A + C)(B + C + \overline{A})(B + C + A)$$
$$= (\overline{A} + B + \underbrace{0.C}_{=0})(A + C + \underbrace{0.B}_{=0}) = (\overline{A} + B)(A + C)$$

3. $$AB + \overline{B}C = AB\underbrace{(1 + C)}_{=1} + \overline{B}C\underbrace{(1 + A)}_{=1} = AB + \overline{B}C + ABC + A\overline{B}C = AB + \overline{B}C + AC$$
$$= AB + \underbrace{\overline{B}B}_{=0} + \overline{B}C + AC = (A + \overline{B})B + (A + \overline{B})C = (A + \overline{B})(B + C)$$

4. $\overline{A\overline{B}+\overline{A}B}=\overline{A\overline{B}}.\overline{\overline{A}B}=(\overline{A}+B)(A+\overline{B})=\underbrace{\overline{A}A}_{=0}+\overline{A}\overline{B}+BA+\underbrace{B\overline{B}}_{=0}=AB+\overline{A}\,\overline{B}$

5. $\overline{(A+B)(\overline{A}+C)}=\overline{A+B}+\overline{\overline{A}+C}=(\overline{A}.\overline{B})+(A.\overline{C})=\underbrace{(\overline{A}+A)}_{=1}(\overline{A}+\overline{C})(\overline{B}+A)(\overline{B}+\overline{C})$

$$=(\overline{A}+\overline{C})(A+\overline{B})(\underbrace{\overline{A}A}_{=0}+\overline{B}+\overline{C})=(\overline{A}+\overline{C})(A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(A+\overline{B}+\overline{C})$$

$$=(\overline{A}+\underbrace{0.\overline{B}}_{=0}+\overline{C})(A+\overline{B}+\underbrace{0.\overline{C}}_{=0})=(A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{C})$$

Exercice 8

Simplifier algébriquement les fonctions suivantes :

1. $F_1=(X+Y)(\overline{X}+Y)$
2. $F_2=\overline{X}\,\overline{Y}+XY+\overline{X}Y$
3. $F_3=XY+\overline{Z}+Z(\overline{X}+\overline{Y})$
4. $F_4=X(\overline{Y}\,\overline{Z}+YZ)+\overline{X}Y\overline{Z}+\overline{X}\,\overline{Y}Z$
5. $F_5=(X+\overline{Y})(X\overline{Y}+Z)Z$
6. $F_6=X\overline{Y}+Z\overline{T}+\overline{X}\,\overline{Y}+\overline{Z}\,\overline{T}$
7. $F_7=(X+Y+Z)(\overline{X}+Y+Z)+XY+YZ$

Exercice 9

Simplifier, par la méthode des diagrammes de Karnaugh, les fonctions booléennes suivantes :

1. $F(A,B,C)=\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+AB\overline{C}$
2. $F(A,B,C)=\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BC+AB\overline{C}$
3. $F(A,B,C)=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}C$
4. $F(A,B,C)=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+AB\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}C$
5. $F(A,B,C)=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}$
6. $F(A,B,C)=\overline{A}\,\overline{B}C+A\overline{B}\,\overline{C}+AB\overline{C}$, sachant que la valeur de F pour les états $\overline{A}BC$ et ABC est indifférente.
7. $F(A,B,C)=(A+B+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+C)$
   Utiliser les zéros du tableau de Karnaugh et donner le résultat sous forme conjonctive.

Proposition de solutions :

Exercice 8

1. $F_1 = Y$
2. $F_2 = \overline{X} + Y$
3. $F_3 = 1$
4. $F_4 = X \oplus Y \oplus Z$
5. $F_5 = (X + \overline{Y})Z$
6. $F_6 = \overline{Y} + \overline{T}$
7. $F_7 = Y + Z$

Exercice 9

1. $F(A,B,C) = \overline{A}\,\overline{B}C + B\overline{C}$
2. $F(A,B,C) = \overline{A}\,B + B\overline{C}$
3. $F(A,B,C) = \overline{A}\,B + A\overline{B} + \overline{B}\,\overline{C}$ ou bien $\overline{A}\,B + A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C}$
4. $F(A,B,C) = \overline{B} + \overline{C}$
5. Pas de simplification possible, il s'agit de la fonction ET inclusif (XNOR), $F(A,B,C) = \overline{A \oplus B \oplus C}$
6. Rappel : en présence d'états indifférents, traiter d'abord la simplification sans en tenir compte, puis les prendre en compte pour agrandir et éventuellement fusionner les regroupements déjà existants (ne pas créer de nouveaux groupes).

$F(A,B,C) = \overline{A}\,C + A\,\overline{C} = A \oplus C$

7. $F(A,B,C) = (B + C)(\overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B})$ ou $(B + C)(\overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + C)$