Variables aléatoires

1) Espérance d'une variable aléatoire discrète :

a) Variable aléatoire :

Définition :

On considère une expérience aléatoire.
Définir une **variable aléatoire**, c'est associer à chaque issue de l'expérience un nombre réel.
On la note à l'aide d'une lettre majuscule : X ou Y par exemple.

Notation
$\{X = a\}$ désigne l'événement « X prend la valeur a ».
$\{X < a\}$ désigne l'événement « X prend les valeurs strictement inférieures à a ».

b) Loi de probabilité :

Définition
On considère une expérience aléatoire sur laquelle on a défini une variable aléatoire X. Définir la **loi de probabilité** de X, c'est associer, à chaque valeur de la variable aléatoire, la probabilité de l'événement associé.

Exemple
75 % des plats vendus dans un restaurant sont à base de viande et valent 15 €, tandis que les autres plats valent 13 €. 35 % des desserts vendus sont à base de chocolat et coûtent 5 € tandis que les autres coûtent 7 €.
On note X la variable aléatoire égale au prix payé par un client. On note V : « le client choisit un plat à base de viande » et C : « le client choisit un dessert à base de chocolat ».
On obtient l'arbre de probabilité ci-contre et la loi de probabilité ci-dessous.

Établir la loi de probabilité ?

c) Espérance :

Définition

On considère une expérience aléatoire sur laquelle on a défini une variable aléatoire X. On donne la loi de probabilité de X dans le tableau ci-contre.

a_i	a_1	a_2	…	a_n
$P(X = a_i)$	p_1	p_2	…	p_n

L'**espérance** de X, notée $E(X)$ est définie par :

$$E(X) = p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_n a_n$$

Exercice résolu A — Calculer l'espérance d'une variable aléatoire discrète et l'interpréter

Un camping propose, en supplément de ses hébergements, deux activités : l'accès à la piscine et l'accès au terrain de golf. Le directeur a constaté que chaque année, 90 % des campeurs prennent l'accès à la piscine au prix de 2 € par personne, alors que 40 % des campeurs prennent l'accès au terrain de golf au prix de 12 € par personne, le choix de l'une des activités étant indépendante de l'autre. On note X la variable aléatoire égale au prix payé par un campeur pour ses activités sur le camping.

1. Représenter l'arbre pondéré illustrant cette situation.
2. Calculer la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat obtenu.

2) Coefficients binomiaux :

a) Schéma de Bernoulli et coefficients binomiaux :

Définitions

- On appelle **épreuve de Bernoulli** une expérience aléatoire dans laquelle on s'intéresse à la réalisation d'un événement particulier qu'on appelle le succès de probabilité p. Sa non-réalisation s'appelle l'échec.
- On appelle **schéma de Bernoulli** la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Les paramètres du schéma de Bernoulli sont n et p.
- On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et on note X la variable aléatoire associée au nombre de succès. Le nombre de chemins associés à l'événement $\{X = k\}$ dans un arbre représentant ce schéma de Bernoulli de taille n est noté $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n ».

Ce nombre est appelé un **coefficient binomial**.

Remarques

- Lorsque $n \leqslant 4$, on représente un schéma de Bernoulli à l'aide d'un arbre pondéré.
- Un coefficient binomial ne dépend pas de p.

b) Triangle de Pascal :

2 Triangle de Pascal

Propriétés (admises)

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

(1) $\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n-1} = n$

(2) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

(3) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Définition

La propriété (2) s'appelle la **formule de Pascal**.

Remarque

Certaines cases sont grisées, car on doit avoir $k \leqslant n$.

n \ k	0	1	2	3	4	…
1	1	1				
2	1	+ 2	1			
3	1	3	3	+ 1		
4	1	4	6	4	1	
…	…	…	…	…	…	…

Propriété

En utilisant la propriété précédente, on complète le tableau ci-contre qui permet de trouver rapidement la valeur des coefficients binomiaux.

Définition

Ce tableau est appelé **triangle de Pascal**.

Exercice résolu B — Calculer des coefficients binomiaux à l'aide du triangle de Pascal

1. Donner la valeur de $\binom{4}{1}$ et de $\binom{4}{2}$.
2. En déduire la valeur de $\binom{5}{2}$.
3. Interpréter la valeur de $\binom{5}{2}$.
4. À l'aide du triangle de pascal, calculer $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$.

Méthode :

-

-

3) loi binomiale :

a)

Définition

On considère la variable aléatoire X associée au nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p. La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p. On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

b)Calculs des probabilités :

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.
Soit k un entier naturel tel que $k \leqslant n$.
Alors $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

c) Espérance d'une loi binomiale :

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.
L'espérance de X est égale à :

$$E(X) = np.$$

Méthode : Calculer les probabilités d'une loi binomiale

Vidéo https://youtu.be/1gMq2TJwSh0

Une urne contient 5 boules gagnantes et 7 boules perdantes. Une expérience consiste à tirer au hasard 4 fois de suite une boule et de la remettre.
On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre de tirages gagnants.
1) Prouver que X suit une loi binomiale.
2) Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules gagnantes.

La loi binomiale avec la calculatrice :

Vidéo https://youtu.be/Zly1AWJu8tg (avec TI)

Vidéo https://youtu.be/TO1ym3lJCQo (avec Casio)

Exercice résolu C — Reconnaître une situation relevant de la loi binomiale

Justifier si les situations suivantes peuvent être modélisées par une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

1 Dans un jeu de 32 cartes, on prélève une première carte, puis une seconde carte.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'as prélevés avec ces deux tirages.

2 On lance un dé cubique bien équilibré trois fois.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus.

Exercice résolu D — Dans le cadre de la loi binomiale, calculer et interpréter les probabilités de $\{X = k\}$.

On lance un dé cubique bien équilibré cinq fois.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus.

1. Calculer la probabilité d'obtenir exactement trois fois le nombre 6.
2. Donner la valeur de $P(X \geqslant 3)$ et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.