Chapitre 2

Algèbres de Boole

2.1 Calcul des propositions (1ère année)

2.2 Calcul des prédicats (1ère année)

2.3 Langage ensembliste

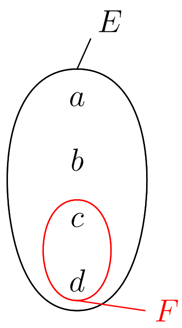
On appelle ensemble une « collection d'objets bien définie ».
E et F désignent des ensembles.
$x \in E$ signifie que x est un élément de E.

Exemples : $2 \in \mathbb{N}$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$; $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$; $0 \in [-5; 5]$

2.3.1 Inclusion

F est inclus dans E si

$$\forall x,\ x \in F \Rightarrow x \in E$$



On le note : $\boxed{F \subset E}$ et on dit que F est un sous-ensemble de E.

Exemple : $E = \{a,b,c,d\}$, $F = \{c,d\}$. $F \subset E$, $F \subset F$, $\varnothing \subset F$.

On parle d'égalité d'ensembles :

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad (\ A \subset B\ \wedge\ B \subset A\ )$$

2.3.2 Ensemble des parties de E

$\mathscr{P}(E)$ désigne l'ensemble de toutes les parties de E.

Exemples : pour $A = \{1,2,3\}$, $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

2.3.3 Complémentaire

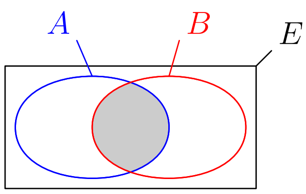
Si $F \in \mathscr{P}(E)$, le complémentaire de F dans E est noté $\complement_E F$ ou $\overline{F}$. C'est l'ensemble $\{x \in E\ ;\ x \notin F\}$

Exemple : pour les ensembles E et F de la figure ci-dessus, $\complement_E F = \{a,b\}$.

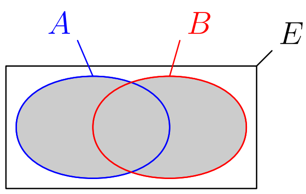
2.3.4 Intersection et réunion

$A \subset E$ et $B \subset E$.

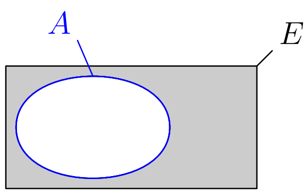
$$A \cup B = \{\ x \in E\ ;\ x \in A\ \vee\ x \in B\ \}$$
$$A \cap B = \{\ x \in E\ ;\ x \in A\ \wedge\ x \in B\ \}$$



Intersection $A \cap B$



Réunion $A \cup B$



Complément $\complement_E A$

Si $A \cap B = \varnothing$, A et B sont disjoints.

Exercice 2.1. Donner un exemple de trois ensembles A, B, C tels que $A \cap C = B \cap C$ et $A \neq B$. Même question en remplaçant $\cap$ par $\cup$.

Exercice 2.2. A et B étant deux parties de E, écrire à l'aide des quantificateurs : $A \cap B \neq \varnothing$, $A \not\subset B$, $A = \varnothing$.

Exercice 2.3. Soient $A =]-\infty\ ;\ 3]$, $B =]-2\ ;\ 7]$ et $C =]-5\ ;\ +\infty[$ trois parties de $\mathbb{R}$. Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cup C$, $\complement_{\mathbb{R}} A$, $\complement_{\mathbb{R}} B$, $\complement_{\mathbb{R}} \left(\complement_{\mathbb{R}} C\right)$, $A \cup \complement_{\mathbb{R}} A$, $A \cap \complement_{\mathbb{R}} A$, $\complement_{\mathbb{R}} (A \cup B)$, $\complement_{\mathbb{R}} (A \cap B)$.

Écrire des propriétés du complémentaire.

Exercice 2.4. A, B et C sont trois parties de E.
Montrer que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Exercice 2.5. A et B étant deux sous-ensembles d'un ensemble E, on définit la différence symétrique $A \triangle B$ par

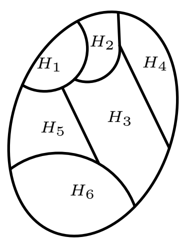
$$A \triangle B = \{x \in E\ ;\ x \in A \cup B\ \wedge\ x \notin A \cap B\}$$

1. Représenter $A \triangle B$ à l'aide d'un diagramme.
2. Déterminer $A \triangle A$, $A \triangle E$, $A \triangle \varnothing$.
3. Démontrer que pour tous sous-ensembles A et B de E, $A \triangle B = B \triangle A$.
4. Exemple : $E = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$, $A = \{a,b,c,d,e,f\}$, $B = \{b,c,e,g,i\}$ et $C = \{c,d,e,h\}$.
   Comparer $(A \triangle B) \triangle C$ et $A \triangle (B \triangle C)$.

Exercice 2.6. Partition

n sous-ensembles H_1, H_2, …, H_n d'un ensemble E forment une partition de E quand leur réunion est égale à E et quand ils sont deux à deux disjoints :

$$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = E \qquad \text{et pour tout } i \neq j \quad H_i \cap H_j = \emptyset$$



1. Soit $E = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, $A = \{a,c,f\}$, $B = \{b,g\}$, $C = \{d,h\}$. A, B, C forment-ils une partition de E ?

2. Même question avec A, B, $C' = \{d,e,f,h\}$.
3. Même question avec A, $B' = \{b,e,g\}$, C.

Exercice 2.7. Partitions. Trouver toutes les partitions de $E = \{1,2,3\}$. Même question avec $E = \{1,2,3,4\}$

Exercice 2.8. Soit P l'ensemble des nombres premiers et A une partie de $\mathbb{N}$. Écrire en utilisant les quantificateurs : A est une partie finie de $\mathbb{N}$. A est une partie infinie de $\mathbb{N}$. Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier. Les éléments de A ont un diviseur premier commun. Les éléments de A n'ont aucun diviseur premier commun.

Exercice 2.9. E est un ensemble à n éléments. Quel est le nombre d'éléments de $\mathscr{P}(E)$?

2.4 Calcul booléen

Nous avons observé des similitudes entre les propriétés de la logique des propositions et de la théorie des ensembles. Ce sont deux cas particuliers d'une structure appelée algèbre de Boole (1815-1864) qui nous permettra de simplifier les problèmes à l'aide de calculs.

Définition 1. Un ensemble $\mathscr{A}$ d'éléments quelconques a, b, c, ... s'appelle une algèbre de Boole quand les conditions suivantes sont vérifiées :

- il est muni de trois opérations notées + (somme), . (produit) et complément (ou négation) [1] ;
- il existe deux éléments particuliers de $\mathscr{A}$ notés 0 et 1.
- Pour tous a, b, c de $\mathscr{A}$:

$$\begin{array}{clr}
\text{Associativité} & a + (b + c) = (a + b) + c & (2.1) \\
 & a.(b.c) = (a.b).c & (2.2) \\
\text{Commutativité} & a + b = b + a & (2.3) \\
 & a.b = b.a & (2.4) \\
\text{Éléments neutres} & a + 0 = a & (2.5) \\
 & a.1 = a & (2.6) \\
\text{Distributivité} & a.(b + c) = a.b + a.c & (2.7) \\
 & a + (b.c) = (a + b).(a + c) & (2.8) \\
Tiers - exclus & a + \overline{a} = 1 & (2.9) \\
Non - contradiction & a.\overline{a} = 0 & (2.10)
\end{array}$$

Exemple 1. L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties d'un ensemble E (non vide), muni de $\cup$, $\cap$ et du complément, a une structure d'algèbre de Boole (les neutres sont $\emptyset$ et E).

Exemple 2. L'ensemble des propositions d'une théorie, muni de $\vee$, $\wedge$, et $\neg$ aussi (les neutres sont $\mathscr{F}$ et $\mathscr{V}$, = est remplacé par $\Leftrightarrow$).

Exemple 3. L'algèbre de Boole la plus simple est celle réduite à $\{0,1\}$. C'est celle que nous utiliserons dans les applications : a, b, c prendront les valeurs 0 ou 1.

1. C'est-à-dire : a et b étant deux éléments quelconques de $\mathscr{A}$, il existe dans $\mathscr{A}$ un seul élément appelé produit de a et b noté $a.b$, un seul élément appelé somme de a et b noté $a + b$; de plus, à tout élément a de $\mathscr{A}$ correspond un élément de $\mathscr{A}$ noté $\overline{a}$.

Exercice 2.10. Écrire les axiomes des algèbres de Boole pour $\mathscr{P}(E)$.

Propriété 1. Pour tout a de $\mathscr{A}$, il existe un unique $b \in \mathscr{A}$ tel que $a+b=1$ et $ab=0$.

Autrement dit : le complément est unique[2]. Cette propriété est pratique pour démontrer les suivantes :

Propriété 2.

$$\begin{array}{lll}
 & \overline{1} = 0 & (2.11) \\
 & \overline{0} = 1 & (2.12) \\
 & \overline{\overline{a}} = a & (2.13) \\
\text{Idempotence} & a.a = a & (2.14) \\
 & a + a = a & (2.15) \\
\text{Absorption} & a + 1 = 1 & (2.16) \\
 & a.0 = 0 & (2.17)
\end{array}$$

Propriété 3 (Lois de De Morgan).

$$\overline{a.b} = \overline{a} + \overline{b} \tag{2.18}$$
$$\overline{a+b} = \overline{a}.\overline{b} \tag{2.19}$$

Pour simplifier des expressions, on utilise souvent la

Propriété 4 (Absorption).

$$a + ab = a \tag{2.20}$$
$$a(a+b) = a \tag{2.21}$$

Il est pratique de l'apprendre sous la forme :
- Dans une somme, tout terme absorbe ses multiples.
- Dans un produit, tout facteur absorbe tout autre facteur qui le contient en tant que terme.

Exemples :

$$\begin{aligned} a.b + a.\overline{b} &= \\ &= \\ &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a.(\overline{a} + b) &= \\ &= \\ &= a.b \end{aligned}$$

2. Remarque : On utilisera les conventions de priorités usuelles entre + et . même si on ne manipule pas des nombres ici.

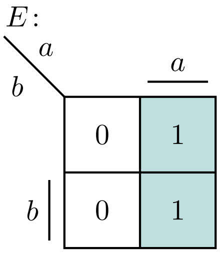
$$\begin{aligned} a + \overline{a}.b &= \\ &= \\ &= a + b \end{aligned}$$

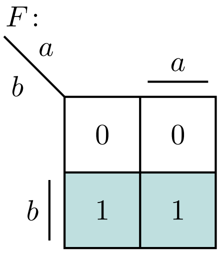
Exercice 2.11. Démontrer les propriétés 1 et (2.11) à (2.21) en n'utilisant que les axiomes (2.1) à (2.10).

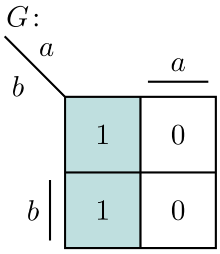
Méthode des tableaux de Karnaugh

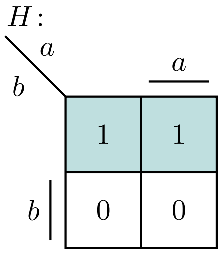
C'est une méthode pratique dans le cas où les variables a, b, ... ne prennent que les valeurs 0 et 1.

$E = a$ $\quad$ $F = b$ $\quad$ $G = \overline{a}$ $\quad$ $H = \overline{b}$







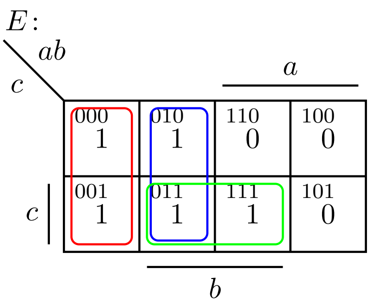


On simplifie en groupant les 1 adjacents. On essaie de former les groupes les plus gros possibles. Un 1 peut faire partie de plusieurs groupes.

Exemple[3] : $E = abc + \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}bc + \overline{a}\overline{b}c$
En faisant des groupes de deux, on peut simplifier cette expression comme

$$E = \overline{a}\overline{b} + bc + \overline{a}b$$

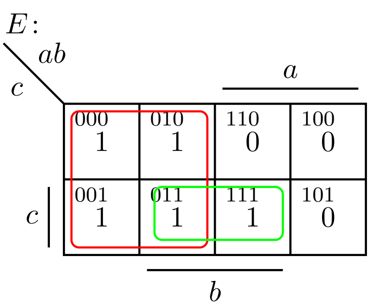
.



En faisant un groupe de quatre 1 et un groupe de 2, on obtient aussi :

$$E = \overline{a} + bc$$

.



Exercice 2.12. Fiche pdf

3. Par convention, on dit que l'expression E est vraie quand la fonction de trois variables $E(a,b,c)$ vaut 1.

Exercices sur le calcul booléen

Exercice 2.13. SIO Métropole 2017

Cet exercice envisage deux. problèmes relatifs à l'équipement d'une salle informatique d'une entreprise. Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1 : Choix d'un réseau

Le réseau informatique qui équipera la salle doit satisfaire au moins l'une des conditions suivantes :

- le réseau compte 5 postes ou plus et il existe un poste qui ne reçoit pas de données en entrée
- il existe un poste qui ne reçoit pas de données en entrée, et le réseau compte strictement moins de 5 postes, et il comporte strictement plus de 12 connexions ;
- le réseau comporte 12 connexions ou moins.

On définit les variables booléennes suivantes :

- $a = 1$ si le réseau compte 5 postes ou plus, $a = 0$ sinon ;
- $b = 1$ s'il existe un poste qui ne reçoit pas de données en entrée, $b = 0$ sinon ;
- $c = 1$ si le réseau comporte 12 connexions ou moins, $c = 0$ sinon.

1. Cette question est une question à choix multiple. Une seule réponse est correcte. Recopier sur la copie seulement la réponse correcte. On ne demande pas de justification.

   Parmi les quatre phrases suivantes, donner celle qui traduit la variable $\overline{b}$:

   — réponse A : « il existe un poste qui reçoit des données en entrée » ;
   — réponse B : « tout poste reçoit des données en entrée » ;
   — réponse C : « il existe un poste qui envoie des données en sortie » ;
   — réponse D : « aucun poste ne reçoit des données en entrée ».
2. Donner l'expression booléenne E traduisant les critères voulus pour un réseau informatique.
3. À l'aide d'un tableau de Karnaugh ou par des calculs, exprimer E comme somme de deux variables booléennes.
4. Traduire les critères de sélection simplifiés, à partir de l'expression obtenue à la question 3.
5. Un réseau dans lequel 2 postes ne reçoivent pas de données en entrée et qui comporte 15 connexions répond-il aux critères voulus ? Justifier la réponse.

Exercice 2.14. SIO Métropole 2015

Une association sportive souhaite recruter une personne pour animer son site internet et dynamiser son image. Le candidat recruté devra remplir l'une au moins des quatre conditions suivantes :

— avoir des connaissances en informatique et être sous contrat avec la mairie ;
— ne pas avoir de connaissances particulières en informatique, mais être membre de l'association et être sous contrat avec la mairie ;
— ne pas être membre de l'association mais être sous contrat avec la mairie ;
— ne pas être sous contrat avec la mairie, mais être membre de l'association.

On définit les trois variables booléennes a, b, et c de la manière suivante :

— $a = 1$ si la personne est membre de l'association et $a = 0$ sinon ;
— $b = 1$ si la personne a des connaissances en informatique, et $b = 0$ sinon ;
— $c = 1$ si la personne est en contrat avec la mairie, et $c = 0$ sinon.

1. Écrire une expression booléenne E traduisant globalement les conditions de recrutement.
2. À l'aide d'un calcul booléen ou d'un tableau de Karnaugh, simplifier l'expression E sous la forme d'une somme de deux termes, puis interpréter cela à l'aide d'une phrase.
3. Un candidat ayant des connaissances en informatique se présente, mais il est écarté car il ne correspond pas eux critères de recrutement.
   Que peut-on en déduire sur le profil de ce candidat ?

Exercice 2.15. *Un règlement administratif concerne les trois catégories d'individus suivantes :*

- *les hommes de moins de* 50 *ans ;*
- *les non salariés ayant* 50 *ou plus de* 50 *ans ;*
- *les femmes qui sont*
  — *soit salariées ;*
  — *soit non salariées et qui ont moins de* 50 *ans.*

On définit quatre variables booléennes h, a, s, r *ainsi :*
x désignant un individu quelconque,
$h = 1$ *si x est un homme ($h = 0$ sinon) ;*
$a = 1$ *si x est âgé (e) de* 50 *ans ou plus de 50 ans ($a = 0$ sinon) ;*
$s = 1$ *si x est salarié (e) ($s = 0$ sinon) ;*
$r = 1$ *si x est concerné (e) par le règlement ($= 0$ sinon).*

1. Quels sont les individus x pour lesquels on a $h \cdot \overline{a} = 1$?
2. On admet que $r = h \cdot \overline{a} + \overline{s} \cdot a + \overline{h} \cdot (s + \overline{s} \cdot \overline{a})$.
   (a) Représenter r par une table de Karnaugh (ou une table de vérité).
   (b) En déduire une expression simplifiée de r.
   (c) Quelle est la catégorie d'individus non concernés par le règlement ?
3. En utilisant uniquement le calcul booléen, montrer que

$$h.\overline{a} + \overline{s} \cdot a + \overline{h} \cdot (s + \overline{s} \cdot \overline{a}) = \overline{a} + \overline{s} + \overline{h}.$$

   (On pourra utiliser les propriétés suivantes, vérifiées par deux variables booléennes y et z :

$$y + y \cdot z = y \quad \text{et} \quad y + \overline{y} \cdot z = y + z).$$