5-Graphes

A. Modes de représentation

Exemple

Dans une ville on considère quatre carrefours A, B, C, D reliés par des rues où la circulation s'effectue en double sens ou à sens unique.

Nous allons présenter de plusieurs façons les informations contenues dans le texte ci-dessous.

Une rue à sens unique va directement de A à B.

Une rue à sens unique va directement de A à C.

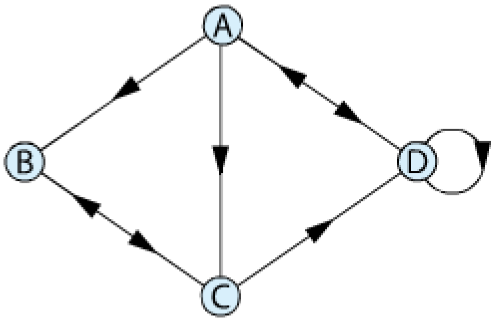
Une rue en double sens relie directement A et D.

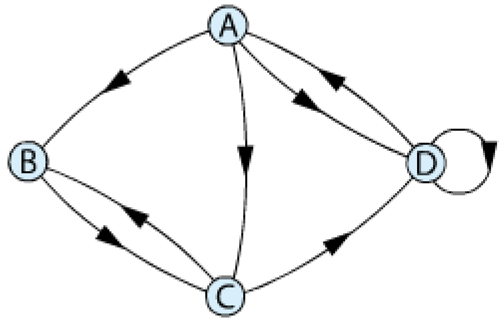
Une rue en double sens relie directement B et C.

Une rue à sens unique va directement de C à D.

Enfin une rue à sens unique va de D à D sans passer par A, B ou C.

- Nous pouvons représenter cette situation à l'aide de l'un des deux graphiques suivants dont la lecture est évidente.





• Nous pouvons aussi indiquer, pour chaque carrefour, quels carrefours peuvent être atteints directement ; ceux-ci sont appelés les **successeurs** du carrefour considéré.

Carrefours	Successeurs
A	B, C, D
B	C
C	B, D
D	A, D

On peut représenter la situation par un tableau

Extrémité / Origine	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	0	0	1	0
C	0	1	0	1
D	1	0	0	1

- Nous pouvons associer, de façon évidente, la matrice suivante au tableau précédent.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice carrée ne comporte que des 0 et des 1, et nous savons qu'il est possible de définir sur l'ensemble {0, 1} une structure d'algèbre de Boole.

DÉFINITION

Une **boucle** est un arc dont les extrémités sont confondues.

Exemple : le sommet D dans le graphe de l'exemple ci-haut.

DÉFINITION

La **matrice d'adjacence** d'un graphe fini simple orienté comportant n sommets est la matrice carrée (a_{ij}) à n lignes où

$a_{ij} = 1$ si (x_i, x_j) est un arc du graphe,

$a_{ij} = 0$ dans le cas contraire.

Exemple

Dans l'exemple précédent, la matrice d'adjacence du graphe est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

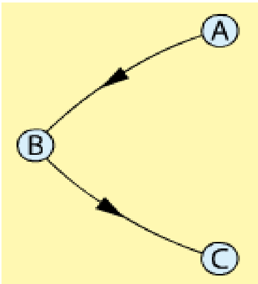
B. Chemin d'un graphe fini simple orienté

Chemin :

DÉFINITION

Dans un graphe fini simple orienté, un **chemin** est une suite ordonnée de sommets dont chacun, sauf le premier, a le sommet suivant comme successeur.

Exemple : Le chemin A- B - C

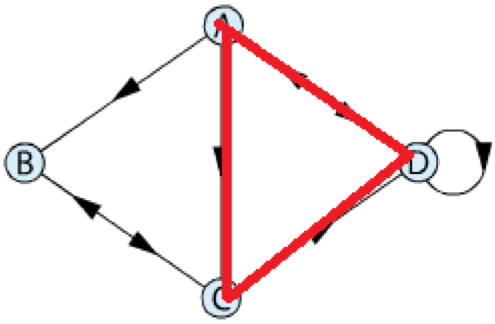


Circuit

DÉFINITION

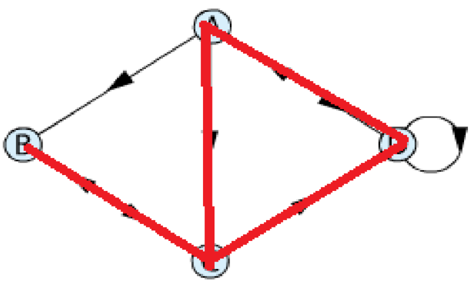
Dans un graphe fini simple orienté, un **circuit** est un chemin dont le premier et le dernier sommet sont identiques.

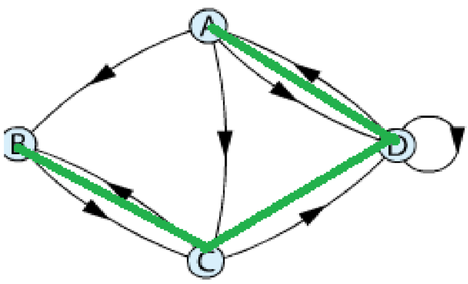
Exemple : D-A-C-D



Chemin hamiltonien :

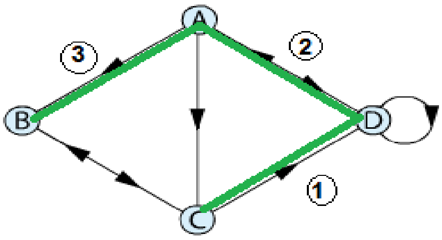
En rouge n'est pas un chemin hamiltonien et en vert est bien un chemin hamiltonien.





Longueur d'un chemin :

Exemple :



DÉFINITION

Dans un graphe fini simple orienté, un **chemin hamiltonien** est un chemin passant une fois et une seule par tous les sommets du graphe.

DÉFINITION

La longueur d'un chemin est le nombre d'arcs qui constituent le chemin.

PROPRIÉTÉ

La longueur d'un chemin de ***n*** **sommets est** $\boldsymbol{n-1}$.

Chemins de longueur p d'un sommet x_i à un sommet x_j

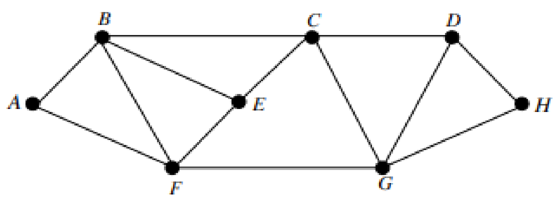
PROPRIÉTÉ

Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe fini simple orienté comportant n sommets.

Le **nombre de chemins de longueur** $\boldsymbol{p}$ **d'un sommet** $\boldsymbol{x_i}$ **à un sommet** $\boldsymbol{x_j}$ est le nombre situé à la ligne i et à la colonne j de la matrice M^p.

Exemple :

On se donne le graphe G suivant :



Combien y a-t-il de cycles de longueur 6 de A à E ? Combien y a-t-il de cycles de longueur 6 ?

Solution

On écrit tout d'abord la matrice d'adjacence du graphe G. En ordonnant les lignes de A à H dans l'ordre alphabétique, on obtient la matrice :

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse tout d'abord aux chemins de longueur 6 de A à E. Pour cela, il faut élever la matrice M à la puissance 6. Heureusement, un ordinateur peut faire le calcul à notre place (il va sans dire que l'on ne demandera à un étudiant de calculer à la main la puissance sixième d'une matrice 8 par 8 !). On obtient :

$$M^6 = \begin{pmatrix} 110 & 176 & 162 & 108 & 161 & 160 & 157 & 67 \\ 176 & 317 & 273 & 201 & 271 & 276 & 280 & 117 \\ 162 & 273 & 346 & 201 & 232 & 329 & 238 & 166 \\ 108 & 201 & 201 & 164 & 176 & 185 & 209 & 104 \end{pmatrix}$$

PROPRIÉTÉ

Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe fini simple orienté comportant n sommets.

Il existe (au moins) un chemin de longueur p d'un sommet x_i à un sommet x_j si et seulement si le nombre situé à la ligne i et à la colonne j de la matrice **booléenne** $M^{[p]}$ est 1.

<u>Méthode :</u> Soit M, la matrice adjacente à un graphe orienté. La matrice adjacente de la fermeture transitive du graphe se calcule ainsi : $M = M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]} \oplus \ldots \oplus M^{[n]}$ où n est le nombre de sommets, $\oplus$ est l'addition booléenne des matrices et $M^{[n]}$ est la n^ième^ puissance booléenne de la matrice M.

Dans notre exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{[3]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M^{[4]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

C. Fermeture transitive d'un graphe fini simple orienté

DÉFINITION

La **fermeture transitive** d'un graphe fini simple orienté est le graphe obtenu en conservant les sommets et en ajoutant, si nécessaire, les arcs (x, y) pour lesquels il existe un chemin de x à y dans le graphe initial.

<u>Méthode :</u> Soit M, la matrice adjacente à un graphe orienté. La matrice adjacente de la fermeture transitive du graphe se calcule ainsi : $M = M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]} \oplus \ldots \oplus M^{[n]}$ où n est le nombre de sommets, $\oplus$ est l'addition booléenne des matrices et $M^{[n]}$ est la n^ième^ puissance booléenne de la matrice M.

La **<u>somme booléenne</u>** de matrices booléennes M et N se note $M \oplus N$. C'est la matrice obtenue en effectuant une somme booléenne des éléments de M et de N : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

La somme booléenne consiste à remplacer dans la somme classique tous les réels supérieurs ou égaux à 1 par 1.

Le **<u>produit booléen</u>** $M \otimes N$ et la puissance booléenne $M^{[n]}$ de 2 matrices se se calculent de la même façon

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans notre exemple :

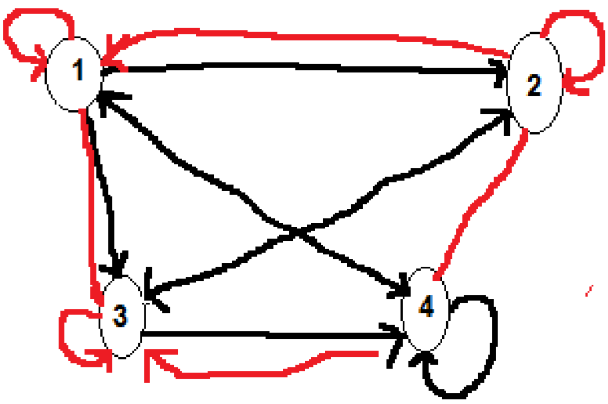
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{[3]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M^{[4]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui signifie que quelque soient les deux sommets choisis, il existe un chemin reliant ces deux sommets.

<u>Une autre méthode</u> graphique qui consiste à mettre une arrêt entre deux sommets reliés par un chemin.



Ce qui donne le même résultat.

D. Niveaux d'un graphe fini simple orienté sans circuit

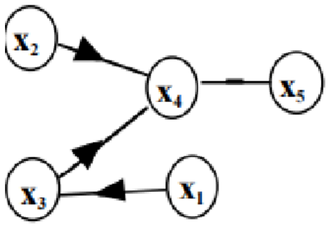
<u>Définition :</u> Dans un graphe orienté, sans circuit, le **niveau** d'un sommet x_i est 0 s'il n'a pas de prédécesseur : sinon c'est la longueur du chemin le plus long ayant x_i comme extrémité terminale.

<u>Définition :</u> Ordonnancer un graphe, c'est classer ses sommets par niveaux. C'est aussi modifier sa représentation géométrique de façon que, de gauche à droite, les sommets soient de niveau croissants ; les sommets de même niveau sont alors sur une verticale.

<u>Remarque</u> :

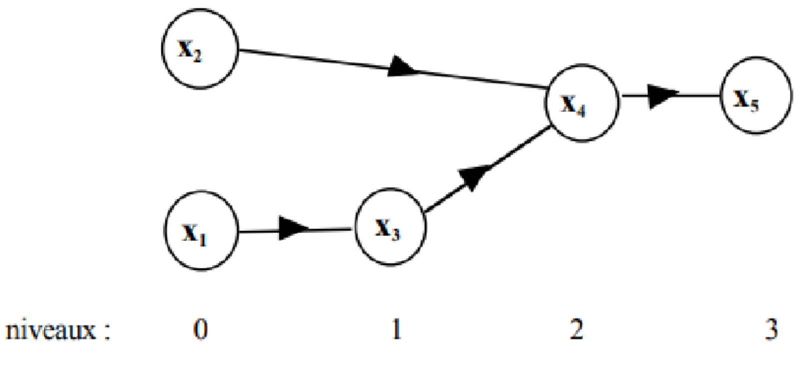
- Un graphe orienté contenant au moins un circuit n'a pas de sommet de niveau 0, on ne peut pas l'ordonnancer
- Un sommet est de niveau k (k $\in$ N*) lorsque k-1 est le maximum des niveaux de ses prédécesseurs.

<u>Exemple :</u> Pour ordonnancer le graphe suivant :



x_1 et x_2 n'ont pas de prédécesseurs. Ce sont donc des sommets de niveau 0.
x_1 est le seul prédécesseur de x_3 x_3 est donc de niveau 1
x_2 et x_3 sont les seuls prédécesseurs de x_4, x_3 est de niveau 1 et x_2 de niveau 0 donc x_4 est de niveau 2
x_4 est le seul prédécesseur de x_5, x_5 est donc de niveau 3

Le graphe ordonnancé a donc cette représentation géométrique :



E. Graphe valué (pondéré)

- On peut être amené à affecter une valeur à chaque arc d'un graphe simple orienté sans circuit.

À RETENIR

> La **valeur d'un chemin** est la somme des valeurs affectées aux arcs qui constituent le chemin.

- On peut alors chercher les chemins de valeur minimale (ou maximale) d'un sommet fixé à un autre.
- Pour cela on commence par ordonner le graphe par niveaux.