Propriété : Un entier $a$ admet un inverse modulo $n$, si $a$ et $n$ sont premiers entre eux.

Méthode : Déterminer un inverse modulo $n$

Vidéo https://youtu.be/Pl4FaV5GZyc

a) Déterminer un inverse de 5 modulo 16.
b) En déduire les solutions de l'équation $5x \equiv 7[16]$.

3) Théorème de Gauss

Théorème de Gauss : Soit $a$, $b$ et $c$ trois entiers naturels non nuls.
Si $a$ divise $bc$ et si $a$ et $b$ sont premiers entre eux alors $a$ divise $c$.

Démonstration au programme :
$a$ divise $bc$ donc il existe un entier $k$ tel que $bc = ka$.
$a$ et $b$ sont premiers entre eux donc il existe deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que :
$au + bv = 1$.
Soit : $acu + bcv = c$ soit encore $acu + kav = c$
Et donc $a(cu + kv) = c$
On en déduit que $a$ divise $c$.

Corollaire : Soit $a$, $b$ et $c$ trois entiers naturels non nuls.
Si $a$ et $b$ divisent $c$ et si $a$ et $b$ sont premiers entre eux alors $ab$ divise $c$.

Exemple :
6 et 11 divisent 660,
6 et 11 sont premiers entre eux,
donc 66 divise 660.

Remarque :
Intuitivement, on pourrait croire que la condition « $a$ et $b$ sont premiers entre eux » est inutile.
Prenons un contre-exemple :
6 et 9 divisent 18,
6 et 9 ne sont pas premiers entre eux,
et 6 x 9 = 54 ne divise pas 18.

Méthode : Appliquer le théorème de Gauss

**Vidéo** https://youtu.be/vTqqk96T_Fo

a) Soit un entier naturel $n$. On suppose que $5n$ est un multiple de $3$. Quelles sont les valeurs possibles pour $n$ ?
b) Soit un entier naturel $n$ multiple de $7$ et de $11$. Quelles sont les valeurs possibles pour $n$ ?

Méthode : Résoudre une équation diophantienne (du type $ax + by = c$)

**Vidéo** https://youtu.be/XpYK-F4hX24

a) Déterminer les entiers $x$ et $y$ tels que $5x + 7y = 1$.
b) Déterminer les entiers $x$ et $y$ tels que $5x + 7y = 12$.